

Literatur:  
Demtröder, Ex-Physik-1

### 5.7 Rotation um freie Achsen; Kreiselbewegungen

Bisher haben wir nur die Rotation eines starren Körpers um eine *raumfeste* Achse behandelt. Selbst bei dem die schiefe Ebene herabrollenden Zylinder blieb die Richtung der Rotationsachse konstant, wenn sie auch selbst eine Translationsbewegung machte.

In diesem Abschnitt wollen wir uns dem komplizierteren Problem zuwenden, welche Bewegungen ein starrer Körper sowohl ohne äußere Kräfte als auch unter dem Einfluss von Drehmomenten ausführt, wenn er nicht durch eine festgehaltene Achse in seinen Freiheitsgraden eingeschränkt wird. Man nennt einen solchen um „freie Achsen“ rotierenden starren Körper einen **Kreisel**.

Die Translation des Schwerpunktes lässt sich immer separat behandeln. Man kann z. B. die Bewegung des Körpers im Schwerpunktsystem beschreiben, in dem der Schwerpunkt ruht, sodass wir uns nur um die Rotation um den Schwerpunkt zu kümmern brauchen. Wir werden sehen, dass bei der Rotation eines Körpers um sogenannte *freie Achsen* die Rotationsachse selbst ihre Richtung im Raum im Laufe der Zeit ändern kann, sodass die Bewegung eines beliebigen Punktes des starren Körpers im Allgemeinen eine komplizierte Bahnkurve durchläuft.

Um die Kreisbewegung um zeitlich sich ändernde Rotationsrichtungen quantitativ beschreiben zu können, wollen wir zuerst die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Rotationsachse (die immer durch den Schwerpunkt gehen soll) untersuchen.

#### 5.7.1 Trägheitstensor und Trägheitsellipsoid

Wenn ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine beliebige Achse durch seinen Schwerpunkt  $S$  rotiert (Abb.5.21), so hat ein Masselement  $\Delta m_i$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$  bewegt, den Drehimpuls

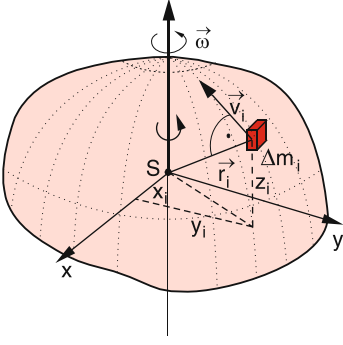
$$\mathbf{L}_i = \Delta m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \Delta m_i (\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i)) \quad (5.33a)$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Vektorrelation (siehe Anhang A.1.5.4)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

**Tabelle 5.2.** Vergleich entsprechender Größen bei Translation und Rotation

Translation	Rotation
Länge $L$	Winkel $\varphi$
Masse $m$	Trägheitsmoment $I$
Geschwindigkeit $\mathbf{v}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega$
Impuls $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$	Drehimpuls $\mathbf{L} = I \cdot \omega$
Kraft $\mathbf{F}$	Drehmoment $\mathbf{D} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	$\mathbf{D} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$
$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$	$E_{\text{rot}} = \frac{I}{2} \omega^2$
Rückstellkraft $\mathbf{F} = -D \cdot \mathbf{x}$	Rückstell-Drehmoment $\mathbf{D} = -D_r \cdot \varphi$
Schwingungsdauer einer linearen Schwingung $T = 2\pi \sqrt{m/D}$	Schwingungsdauer einer Torsionsschwingung $T = 2\pi \sqrt{I/D_r}$



**Abb. 5.21.** Rotation eines Körpers um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt

Man kann die Größen  $I_{ik}$  in Form einer Matrix

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.53b)$$

zusammenfassen und dadurch (5.34b) in vektorieller Form schreiben als

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (5.34c)$$

was oft auch abgekürzt als

$$\mathbf{L} = \tilde{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.34d)$$

geschrieben wird. Mathematisch ist  $\tilde{I}$  ein Tensor 2. Stufe, der **Trägheitstensor** heißt. Die Diagonalelemente  $\tilde{I}$  geben die Trägheitsmomente des Körpers bei Rotation um die Koordinatenachsen (Nullpunkt in  $S$ ) an. So ist z. B. wegen  $dm = \rho \, dV$

$$I_{xx} = \rho \int (r^2 - x^2) \, dV = \rho \int (y^2 + z^2) \, dV$$

das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers bei Rotation um die  $x$ -Achse.

Um uns den Trägheitstensor anschaulich zu machen, wollen wir zuerst die Rotationsenergie bei Rotation um eine beliebige Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  berechnen: Für ein Massenelement  $\Delta m_i$  gilt (Abb. 5.21):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} \Delta m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \Delta m_i [\boldsymbol{\omega}^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2], \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite aus der Vektorrelation  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$  folgt. Die räumliche Integration ergibt die Rotationsenergie des ganzen Körpers:

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{\omega^2}{2} \int r^2 \, dm - \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \, dm \\ &= \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}{2} \int (x^2 + y^2 + z^2) \, dm \\ &\quad - \frac{1}{2} \int [\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z]^2 \, dm \\ &= \frac{1}{2} [\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} \\ &\quad + \omega_x \omega_y I_{xy} + \omega_x \omega_z I_{xz} + \omega_y \omega_z I_{yz}], \end{aligned} \quad (5.36)$$

umformen in

$$L_i = \Delta m_i [(r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i]. \quad (5.33b)$$

Den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}$  des Körpers erhält man durch Integration über alle Massenelemente

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}) \, dm. \quad (5.34a)$$

Diese Vektorgleichung entspricht den drei Komponentengleichungen:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \end{aligned} \quad (5.34b)$$

wobei die Koeffizienten  $I_{ik}$  Abkürzungen für folgende Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (r^2 - x^2) \, dm \\ I_{xy} &= I_{yx} = - \int xy \, dm \\ I_{yy} &= \int (r^2 - y^2) \, dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \int yz \, dm \\ I_{zz} &= \int (r^2 - z^2) \, dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \int xz \, dm. \end{aligned} \quad (5.35a)$$

Man prüft (5.34b) leicht nach, indem man in (5.34a) die Relationen  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  und  $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$  einsetzt und (5.35a) verwendet.

wobei die Definitionen (5.35b) verwendet wurden. In Tensornotation kann (5.36) auch in der Form

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

geschrieben werden, was ausgeschrieben

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\omega_x \omega_y \omega_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

bedeutet

Man sieht, dass bei beliebiger Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  alle Elemente des Trägheitstensors zur Rotationsenergie beitragen.

Bildet die Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den drei Koordinatenachsen, so gilt:

$$\omega_x = \omega \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma.$$

Schreibt man die Rotationsenergie wie in Gleichung (5.16) als

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

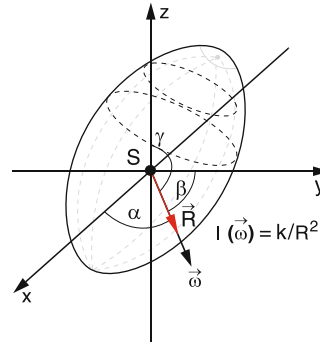
so ergibt ein Vergleich mit (5.36) für das skalare Trägheitsmoment  $I$  bei Rotation um die Achse  $\boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned} I &= \cos^2 \alpha I_{xx} + \cos^2 \beta I_{yy} + \cos^2 \gamma I_{zz} \\ &\quad + 2 \cos \alpha \cos \beta I_{xy} + 2 \cos \alpha \cos \gamma I_{xz} \\ &\quad + 2 \cos \beta \cos \gamma I_{yz}. \end{aligned} \quad (5.37a)$$

Führen wir einen Vektor  $\mathbf{R}$  in Richtung der Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  ein mit den Komponenten:  $x = R \cos \alpha, y = R \cos \beta, z = R \cos \gamma$ , so lässt sich (5.37a) schreiben als:

$$\begin{aligned} R^2 I &= x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} \\ &\quad + 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}. \end{aligned} \quad (5.37b)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $x, y, z$  mit konstanten Koeffizienten  $I_{ik}$ . Alle Raumpunkte  $(x, y, z)$  für die  $R^2 I = k = \text{const}$  gilt, liegen auf einem Ellipsoid, da (5.37b) für  $R^2 I = \text{const}$  die Gleichung eines Ellipsoids mit beliebigen, von den  $I_{ik}$  abhängigen Richtungen der Ellipsoidachsen darstellt. Da  $I \propto M \cdot R_m^2$  ist, hat die Konstante  $k = M R_m^4$  die Dimension:  $[k] = \text{kg} \cdot \text{m}^4$ . Ihr Wert hängt von der Masse  $M$  des Körpers und von seiner Massenverteilung relativ zum Schwerpunkt ab, was durch einen mittleren Abstand  $R_m$  angegeben wird.



**Abb. 5.22.**  
Trägheitsellipsoid

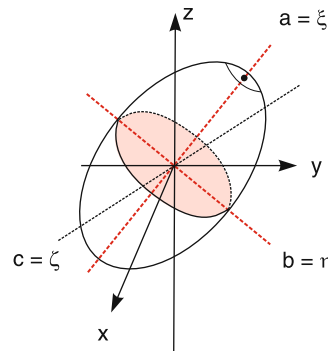
Das Trägheitsmoment  $I_\omega = k/R^2$  bei Rotation um eine beliebige Achse  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$  ist dann proportional zum reziproken Quadrat  $1/R^2$  der Entfernung vom Mittelpunkt des Ellipsoids bis zur Ellipsoidfläche in der Richtung von  $\boldsymbol{\omega}$ . In diesem Sinne sagt man: Der skalare Wert  $I$  des Trägheitsmoments als Funktion der Raumrichtung  $(\alpha, \beta, \gamma)$  der Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  bildet ein **Trägheitsellipsoid** (Abb. 5.22).

### 5.7.2 Hauptträgheitsmomente

Führt man jetzt ein Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \zeta)$  ein, das von drei orthogonalen Vektoren  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$  und  $\boldsymbol{\zeta}$  aufgespannt wird, die in die drei Hauptachsen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  des Trägheitsellipsoids fallen (Abb. 5.23) und deren Länge durch Division mit  $\sqrt{k}$  normiert werden, so wird in diesem Koordinatensystem die Ellipsoidgleichung (5.37) mit  $R^2 I = 1$

$$\xi^2 I_a + \eta^2 I_b + \zeta^2 I_c = 1. \quad (5.38)$$

Alle Nichtdiagonalglieder  $I_{ik}$  ( $i \neq k$ ) werden in diesem „Hauptachsensystem“ Null und der Trägheitstensor hat



**Abb. 5.23.** Zur Definition der Hauptträgheitsachsen

Diagonalform

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Mathematisch lässt sich eine solche **Hauptachsen-transformation** durch Diagonalisierung der entsprechenden Matrix  $I_{ik}$  durchführen [5.2]. Die Hauptträgheitsmomente  $I_a, I_b, I_c$  (d. h. die Trägheitsmomente bei Rotation um die Hauptachsen) sind dann die Lösungen der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0. \quad (5.40)$$

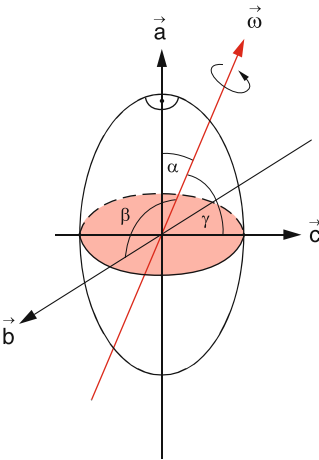
Man beachte, dass im Allgemeinen die Hauptträgheitsmomente  $I_a, I_b, I_c$  *nicht* mit  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  übereinstimmen.

Die Bezeichnung der Hauptträgheitsachsen wird nach internationaler Vereinbarung so gewählt, dass

$$I_a \leq I_b \leq I_c$$

gilt. Das Trägheitsmoment  $I$  um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt, die die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den drei Hauptachsen **a**, **b** und **c** bildet (Abb. 5.24) ist dann:

$$I = I_a \cos^2 \alpha + I_b \cos^2 \beta + I_c \cos^2 \gamma. \quad (5.41)$$



**Abb. 5.24.** Trägheitsmoment um eine beliebige Achse

Diese Gleichung entspricht (5.37a), da jetzt alle Nicht-diagonalelemente von  $\tilde{I}$  Null sind. Durch die Hauptachsentransformation ist der Ausdruck für  $I$  einfacher geworden. Mit Hilfe der Hauptträgheitsmomente lassen sich Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Rotationsenergie schreiben als:

$$\mathbf{L} = \{L_a, L_b, L_c\} = \{\omega_a I_a, \omega_b I_b, \omega_c I_c\}, \quad (5.42)$$

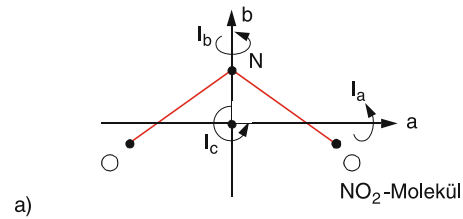
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c) = \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c}. \quad (5.43)$$

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden ( $I_a \neq I_b \neq I_c \neq I_a$ ), so heißt der Körper ein **asymmetrischer Kreisel**.

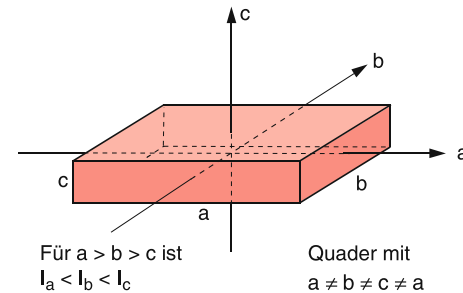
*Beispiel:* Quader mit drei ungleichen Seiten  $a, b, c$  (Abb. 5.25b) oder das gewinkelte  $\text{NO}_2$ -Molekül (Abb. 5.25a).

Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, so heißt der Körper ein **symmetrischer Kreisel**.

*Beispiel:* Alle rotationssymmetrischen Körper (Kreiszyylinder, lineare Moleküle), aber auch quadratische Quader.



a)

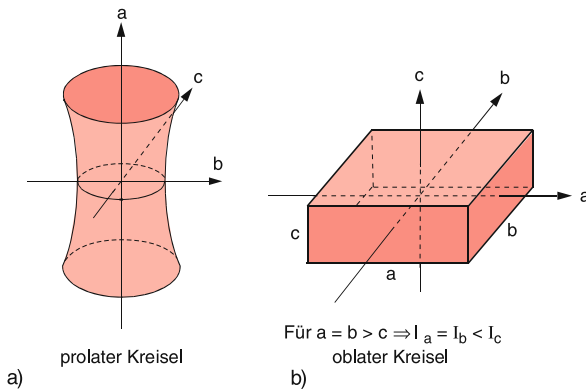


b)

**Abb. 5.25a,b.** Beispiele für asymmetrische Kreisel

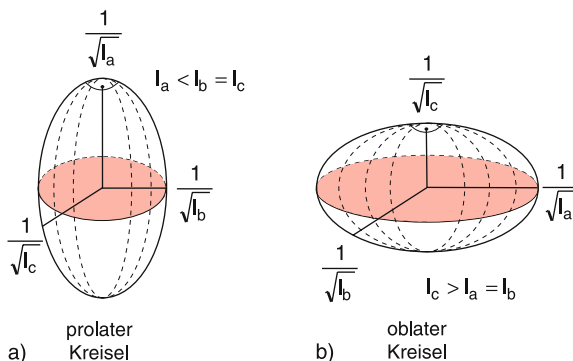
Jeder rotationssymmetrische Körper ist ein symmetrischer Kreisel, aber nicht jeder symmetrische Kreisel ist von seiner geometrischen Gestalt rotationssymmetrisch (z. B. eine quadratische Säule). Sein Trägheitsellipsoid ist dagegen *immer* rotationssymmetrisch.

Wir unterscheiden (Abb. 5.26):



**Abb. 5.26a,b.** Beispiele für symmetrische Kreisel: (a) Prolater und (b) oblater symmetrischer Kreisel

- *Prolate* symmetrische Kreisel (Abb. 5.26a):  $I_a < I_b = I_c$ . Das Trägheitsellipsoid ist ein lang gestrecktes Rotationsellipsoid, dessen Symmetrieachse  $z$  länger ist als sein Durchmesser (Abb. 5.27a).
- *Oblate* symmetrische Kreisel (Abb. 5.26b):  $I_a = I_b < I_c$ . Das Trägheitsellipsoid ist ein gestauchtes Rotationsellipsoid (Diskus, Abb. 5.27b).



**Abb. 5.27a,b.** Trägheitsellipsoide des (a) prolateren und (b) oblateren symmetrischen Kreisels

Nach (5.42) zeigen bei einem asymmetrischen Kreisel Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Rotationsachse  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_a, \omega_b, \omega_c\}$  im Allgemeinen in verschiedene Richtungen, wenn  $I_a, I_b$  und  $I_c$  nicht alle den gleichen Wert haben oder der Körper nicht um eine seiner Hauptträgheitsachsen rotiert (Abb. 5.28).

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich, ( $I_a = I_b = I_c$ ), so heißt der Körper **sphärischer Kreisel**, weil sein Trägheitsellipsoid eine Kugel ist.

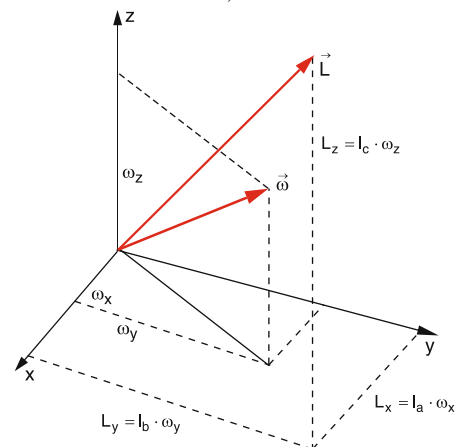
*Beispiel:* Kugel, Würfel.

### 5.7.3 Freie Achsen

Aus (5.42) und Abb. 5.28 erkennt man folgenden wichtigen Sachverhalt: Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  zeigen bei der Rotation eines Körpers, dessen Drehachse nicht festgehalten wird, nur dann in die gleiche Richtung, wenn entweder gilt:

- $I_a = I_b = I_c$  (sphärischer Kreisel), oder:
- Der Körper rotiert um eine seiner Hauptträgheitsachsen, d. h. nur einer der drei Komponenten  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  ist von Null verschieden.
- Bei einem *symmetrischen* Kreisel ist  $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$  auch dann, wenn der Körper um eine beliebige Achse durch  $S$  senkrecht zur Symmetrieachse rotiert.

Da ohne äußeres Drehmoment der Drehimpuls zeitlich konstant bleibt, hat in diesen Fällen der Körper



**Abb. 5.28.** Drehimpulsachse  $\mathbf{L}$  und Rotationsachse  $\boldsymbol{\omega}$  sind im Allgemeinen nicht parallel, wie hier in einem  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem, das mit den Hauptachsen  $(a, b, c)$  zusammenfällt, gezeigt wird

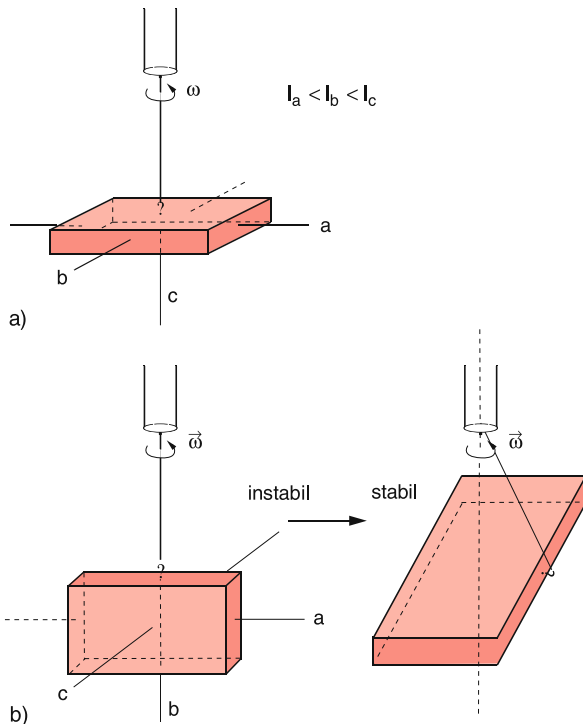
eine *raumfeste Drehachse*, um die er mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert. Seine Bewegung ist dann völlig analog zur Rotation um eine starre Achse (Abschn. 5.6).

Man nennt die Hauptachsen eines Körpers daher auch **freie Achsen**, weil eine einfache Rotation des Körpers um diese Achsen möglich ist, auch wenn diese Achsen nicht fest gelagert sind.

Das Experiment zeigt jedoch, dass eine stabile Rotation nur um die Achse des kleinsten und des größten Trägheitsmomentes realisiert werden kann, während bei Rotation um die freie Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes jede kleine Störung die Bewegung instabil macht und der Körper zu torkeln beginnt.

### BEISPIELE

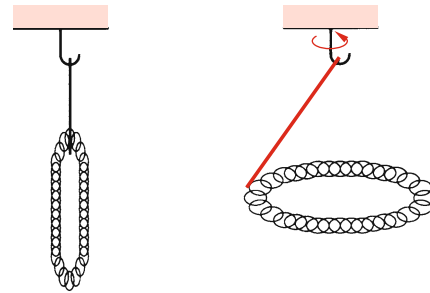
1. Ein an einem Faden aufgehängter Quader mit  $I_a < I_b < I_c$  (Abb. 5.29) kann über einen Motor zur Rotation um diesen Faden gebracht werden. Der



**Abb. 5.29a,b.** Rotation eines Quaders um freie Achsen: (a) stabile Rotation um die Achse des größten Trägheitsmomentes  $I_c$ ; (b) instabile Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes  $I_b$ , die umspringt in eine Rotation um die Achse c

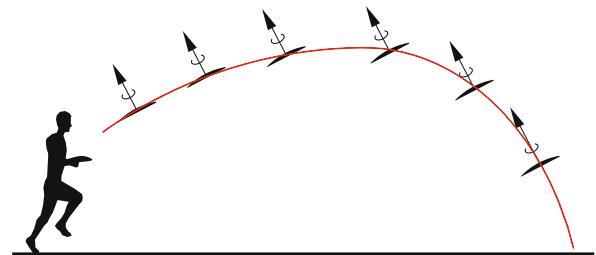
Quader rotiert stabil, wenn die Fadenrichtung mit der Hauptachse a oder c zusammenfällt. Wird er so aufgehängt, dass die Fadenrichtung in Richtung der Achse b zeigt, springt der Quader bei schneller Rotation um in die in Abb. 5.29b gezeigte stabile Rotation um die Hauptachse c. Er rotiert dann nicht mehr um den Faden, d. h. der Faden fällt nicht mehr mit der Rotationsachse zusammen. Die Achse c ist nun eine „freie Achse“.

2. Eine geschlossene Kette hängt an einem Faden und wird zur Rotation gebracht (Abb. 5.30). Durch die Zentrifugalkraft weitet sie sich zu einem Kreis auf, der sich dann horizontal stellt, weil dadurch die Rotation um die Achse des größten Trägheitsmomentes erfolgt und damit die Rotationsenergie  $E_{\text{rot}} = L^2/2I$  bei vorgegebenem Drehimpuls  $L$  minimal wird. Auch hier fällt die Rotationsachse nicht mit der Fadenrichtung zusammen.



**Abb. 5.30.** Rotation einer Kette um die Achse des größten Trägheitsmomentes

3. Eine Diskusscheibe fliegt stabil, solange die Rotation um die Symmetrieachse (größtes Trägheitsmoment) erfolgt (Abb. 5.31).



**Abb. 5.31.** Stabiler Flug einer Diskusscheibe

### 5.7.4 Die Eulerschen Gleichungen

Bei beliebiger Richtung der Drehachse  $\omega$  sind Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Drehachse  $\omega$  nicht mehr parallel. Die Bewegung des Körpers wird dann komplizierter. Um sie quantitativ beschreiben zu können, müssen wir die Bewegung des Körpers im *raumfesten* Koordinatensystem  $R$  darstellen.

Die zeitliche Änderung  $d\mathbf{L}/dt$  des Drehimpulses ist im raumfesten Inertialsystem  $R$ , in dem der Beobachter der Bewegung sitzt, gleich dem äußeren Drehmoment  $\mathbf{D}$ :

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_R = \mathbf{D}. \quad (5.44)$$

In einem Koordinatensystem  $K$ , dessen Achsen die Hauptachsen des Körpers sind, das also starr mit dem Körper verbunden ist und daher mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegen das raumfeste System rotiert, ist die zeitliche Ableitung des Vektors  $\mathbf{L}$  dann (siehe Abschn. 3.3.2)

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_R - (\omega \times \mathbf{L}), \quad (5.45)$$

sodass wir die Vektorgleichung

$$\mathbf{D} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_K + (\omega \times \mathbf{L}) \quad (5.46)$$

erhalten. Diese Gleichung entspricht formal (3.14), wenn wir  $\mathbf{L}$  durch  $\mathbf{r}$  ersetzen. Man beachte, dass in (5.46)  $d\mathbf{L}/dt$  im körperfesten Hauptachsensystem angegeben ist,  $\omega$  jedoch im raumfesten Inertialsystem! Im allgemeinen Fall braucht  $\omega$  in keinem der beiden Systeme zeitlich konstant zu sein.

Schreibt man (5.46) für die Komponenten in Richtung der drei Hauptachsen aus, so erhält man z. B. für die Achse  $a$ :

$$\begin{aligned} D_a &= \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_a + (\omega \times \mathbf{L})_a \\ &= \frac{d}{dt} (I_a \omega_a) + (\omega_b L_c - \omega_c L_b) \\ &= I_a \frac{d\omega_a}{dt} + \omega_b I_c \omega_c - \omega_c I_b \omega_b, \end{aligned}$$

wobei  $D_a$  die Komponente des Drehmoments in Richtung der Achse  $a$  ist.

Entsprechende Gleichungen gelten für die anderen Komponenten. Insgesamt erhält man die drei

### Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_c \omega_b &= D_a \\ I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c &= D_b \\ I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_b \omega_a &= D_c \end{aligned} \quad (5.47)$$

Diese Gleichungen sollen nun an einigen Beispielen verdeutlicht werden.

### 5.7.5 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

Ein symmetrischer Kreisel hat zwei gleiche Hauptträgheitsmomente. Wenn die Symmetrieachse seines Trägheitsrotationsellipsoids die  $c$ -Achse ist, gilt:  $I_a = I_b \neq I_c$ . Ist der Körper selbst auch rotationssymmetrisch, so heißt die Achse auch **Figurenachse**. Bei einem Fahrradkreisel (Abb. 5.32) ist dies die sichtbare Radachse. Wirkt kein äußeres Drehmoment ( $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$ ), so bleibt der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  konstant, d. h. raumfest. Ein solcher Kreisel mit  $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$  heißt in der Literatur **kräftefreier Kreisel**, obwohl er korrekt „drehmomentfreier Kreisel“ heißen müsste. Dreht sich der Kreisel um seine Figurenachse, so fallen die Vektoren  $\mathbf{L}$  und  $\omega$  mit dieser Achse zusammen. Der Körper rotiert dann um eine raumfeste Achse, so als ob er fest gelagert wäre. Liegt jedoch  $\omega$  in einer beliebigen Richtung, die nicht mit der Figurenachse zusammenfällt, so wird die Bewegung kompliziert.

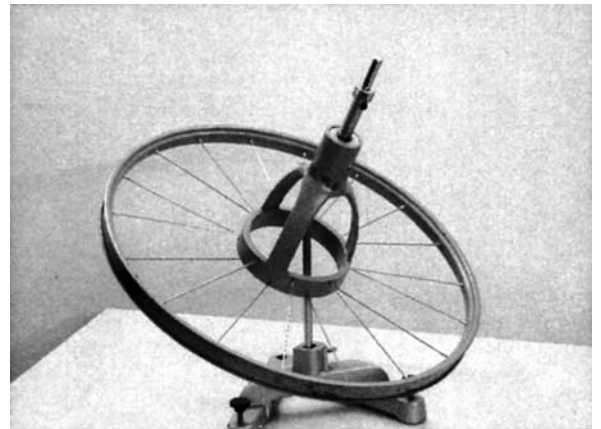
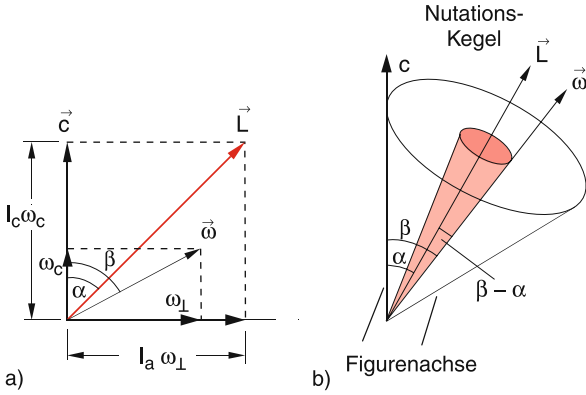


Abb. 5.32. Fahrradkreisel





**Abb. 5.33a,b.** Figurenachse  $c$ , Drehimpulsachse  $L$  und momentane Drehachse  $\omega$ : (a) Zerlegung von  $\omega$  und  $L$  beim symmetrischen Kreisel in eine Komponente parallel zur Figurenachse und eine dazu senkrechte Komponente; (b) Nutationskegel der Figurenachse und der momentanen Drehachse  $\omega$

Um die *allgemeine* Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreises zu beschreiben, muss man drei verschiedene Achsen unterscheiden (Abb. 5.33a):

- Die raumfeste Drehimpulsachse  $L$
- Die momentane (nicht raumfeste) Drehachse  $\omega$
- Die Figurenachse des symmetrischen Kreisels, die nur dann raumfest ist, wenn der Drehimpuls in der Figurenachse liegt.

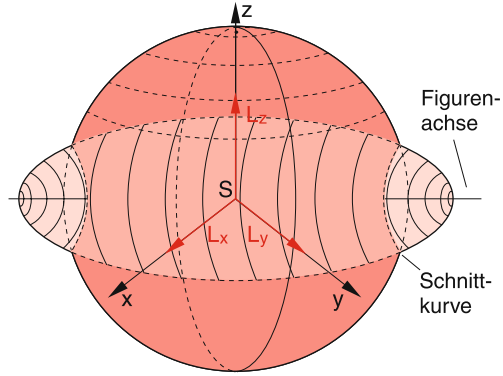
Wir können ein qualitatives Bild von der Bewegung der Figurenachse aus folgender Überlegung gewinnen: Ohne äußeres Drehmoment ist sowohl die Rotationsenergie  $E_{\text{rot}}$  als auch der Drehimpuls  $L$  zeitlich konstant. Wir erhalten daher mit Gleichung (5.43) die beiden Gleichungen:

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \text{const} = C_1, \quad (5.48a)$$

$$\frac{L_a^2}{I_a} + \frac{L_b^2}{I_b} + \frac{L_c^2}{I_c} = \text{const} = C_2. \quad (5.48b)$$

In einem raumfesten Koordinatensystem mit den Achsen  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  stellt (5.48a) die Gleichung einer Kugel dar. Gleichung (5.48b) ist im Hauptachsensystem angegeben und stellt dort ein Ellipsoid dar.

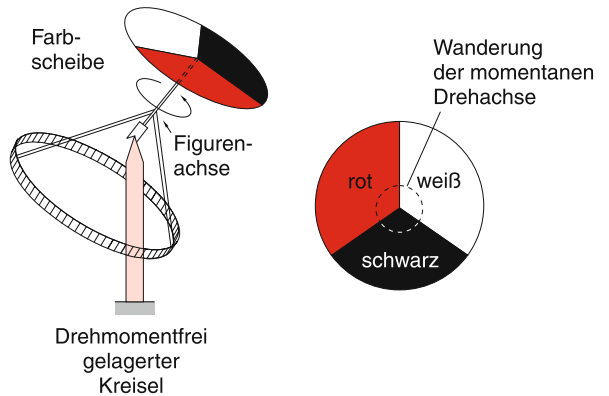
Da die Komponenten des raumfesten Drehimpulsvektors  $L$  beide Gleichungen a) und b) gleichzeitig erfüllen müssen, kann die Spitze von  $L$  nur auf



**Abb. 5.34.** Die Spitze des Drehimpulsvektors liegt auf der Schnittkurve von Drehimpuls- und Energieellipsoid

den Schnittkurven von Kugel und Ellipsoid liegen (Abb. 5.34). Da das Ellipsoid durch das Hauptachsensystem des Kreisels festgelegt ist, also mit dem Kreisel rotiert, der Drehimpuls jedoch raumfest ist, muss der Kreisel und damit sein Trägheitsellipsoid so rotieren, dass  $L$  immer auf der Schnittkurve bleibt. Dies führt dazu, dass sowohl die momentane Drehachse als auch die Figurenachse um die raumfeste Drehimpulsachse eine *Nutationsbewegung* ausführen (Abb. 5.33b), (wenn nicht zufällig  $\omega$  in der Figurenachse liegt, sodass in diesem Fall sowohl  $\omega$  als auch  $L$  mit der nun raumfesten Figurenachse zusammenfallen).

Während man die Figurenachse unmittelbar sieht, muss man die momentane Drehachse  $\omega$  durch einen experimentellen Trick sichtbar machen (Abb. 5.35). Dazu kann man z. B. auf der Spitze der Figurenachse des



**Abb. 5.35.** Sichtbarmachung der momentanen Drehachse



Kreisels eine Kreisscheibe befestigen, auf die rote, schwarze und weiße Kreissegmente gemalt sind. Wenn der Kreisel rotiert, verschwimmen die drei Farben zu einer olivbraunen Mischfarbe. Nur am Durchstoßpunkt der momentanen Drehachse durch ein Segment der Scheibe sieht man die Farbe des Segments, die langsam von rot über schwarz nach weiß wechselt und damit die Wanderung der momentanen Drehachse durch die einzelnen Segmente anzeigt.

Um die Bewegung der momentanen Drehachse und der Figurenachse quantitativ zu untersuchen, wenden wir nun die Eulerschen Gleichungen (5.47) auf unseren speziellen Fall  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  und  $I_a = I_b$  an. Die Gleichungen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_a + \Omega \omega_b &= 0, \\ \dot{\omega}_b - \Omega \omega_a &= 0, \\ \dot{\omega}_c &= 0,\end{aligned}\quad (5.49)$$

mit der Abkürzung:  $\Omega = ((I_c - I_a)/I_a)\omega_c$ . Eine Lösung dieses Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned}\omega_a &= A \cos \Omega t, & \omega_b &= A \sin \Omega t, \\ \omega_c &= C & \text{mit } A, C &= \text{const},\end{aligned}\quad (5.50)$$

wie man durch Einsetzen sofort bestätigt. Man sieht hieraus auch, dass der Betrag  $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$  wegen  $\omega_a^2 + \omega_b^2 + \omega_c^2 = A^2 + C^2 = \text{const}$  auch im körperfesten System zeitlich konstant bleibt. Was sich ändert sind die Komponenten  $\omega_a$  und  $\omega_b$ , und damit die Richtung von  $\boldsymbol{\omega}$ .

Zerlegen wir  $\boldsymbol{\omega}$  in eine Komponente  $\boldsymbol{\omega}_c = \text{const}$  parallel zur Figurenachse  $\mathbf{c}$  und eine Komponente  $\boldsymbol{\omega}_\perp$  mit  $\omega_\perp = \sqrt{\omega_a^2 + \omega_b^2} = A$  senkrecht zu  $\mathbf{c}$  (Abb. 5.33a), so gilt nach (5.42) für dieselbe Komponentenzerlegung von  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = I_a \boldsymbol{\omega}_\perp + I_c \boldsymbol{\omega}_c. \quad (5.51)$$

Die Figurenachse  $\mathbf{c}$  bildet nach Abb. 5.33b und (5.50) den zeitlich konstanten Winkel  $\alpha$  mit der raumfesten Drehimpulsachse, wobei gilt:

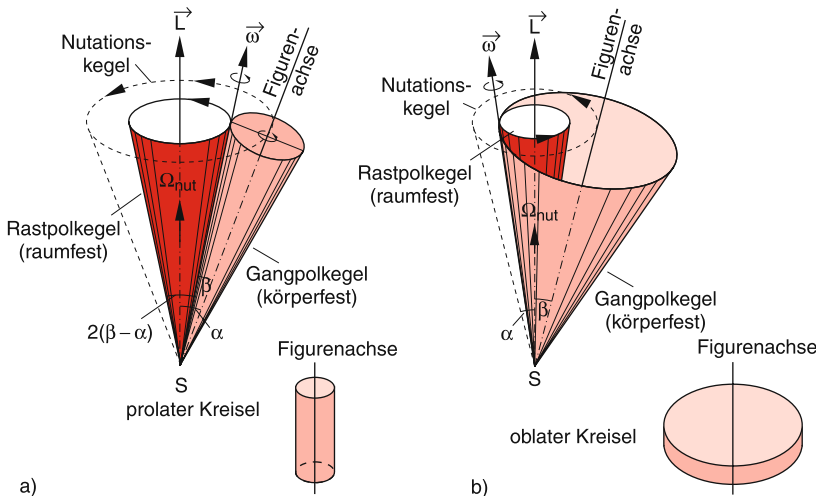
$$\tan \alpha = \frac{I_a \omega_\perp}{I_c \omega_c} = \frac{I_a}{I_c} \frac{\sqrt{\omega_a^2 + \omega_b^2}}{\omega_c} = \frac{I_a}{I_c} \cdot \frac{A}{\omega_c}.$$

Das heißt, die Figurenachse wandert auf einem Kegel mit dem vollen Öffnungswinkel  $2\alpha$  um die raumfeste Achse  $\mathbf{L}$  (Abb. 5.33b und 5.36). Dieser Kegel heißt **Nutationskegel**.

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\omega_a^2 + \omega_b^2 + \omega_c^2} = \sqrt{A^2 + C^2}$$

ist zeitlich konstant. Der Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  bildet mit der Figurenachse den zeitlich konstanten Winkel  $\beta$  mit  $\sin \beta = \omega_\perp / \omega = A / \omega_c$ . Die momentane Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  läuft daher auf einem Kegel, aber mit dem Öffnungswinkel  $2(\beta - \alpha)$  (**Rastpolkegel** oder Herpolhodiekegel) um die raumfeste Drehimpulsachse  $\mathbf{L}$ . Man nennt diese gemeinsame Bewegung von Figurenachse und momentaner Drehachse **Nutation**.



**Abb. 5.36a,b.** Nutationskegel, Rastpolkegel und Gangpolkegel: (a) prolat, (b) oblat Kreisel

Man kann die gemeinsame Bewegung von Figurenachse und momentaner Drehachse auf zwei Kegeln mit verschiedener Öffnung um die raumfeste Drehimpulsachse mit Hilfe eines dritten Kegels (**Gangpolkegel** oder Polhodiekegel) verdeutlichen, der starr mit der Figurenachse verbunden ist, den raumfesten Rastpolkegel entlang der momentanen Drehachse  $\omega$  berührt und auf ihm abrollt (Abb. 5.36). Die Berührungslinie gibt dann zu jedem Zeitpunkt die Lage der momentanen Drehachse  $\omega$  an. Für einen oblaten Kreisel (Abb. 5.36a) rollt der Gangpolkegel so ab, dass der Rastpolkegel immer im Inneren des Gangpolkegels bleibt, beim prolaten Kreisel bleibt er außerhalb (Abb. 5.36b). Die Spitzen aller drei Kegel liegen im Schwerpunkt  $S$  des Körpers.

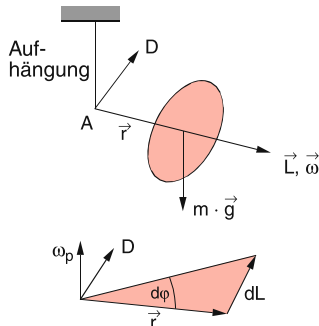
### 5.7.6 Präzession des symmetrischen Kreisels

Wenn ein äußeres Drehmoment  $D$  auf den Kreisel wirkt, bleibt wegen  $D = dL/dt$  der Drehimpuls nicht mehr raumfest, sondern ändert seine Richtung und, je nach der Richtung von  $D$ , auch seine Größe. Wir wollen zuerst den einfachsten Fall behandeln, dass sich der Kreisel um seine Figurenachse dreht, also alle drei Achsen  $L$ ,  $\omega$  und  $c$  zusammenfallen; es gibt dann *keine* Nutation.

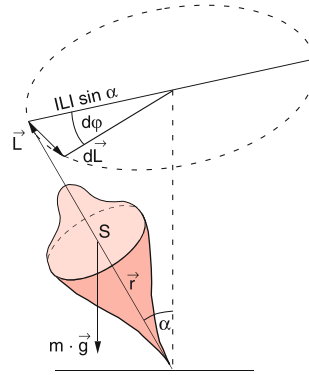
Wird der Kreisel *nicht* im Schwerpunkt unterstützt, so wirkt z. B. bereits auf Grund der Gewichtskraft das Drehmoment

$$D = r \times mg,$$

wobei  $r$  der Vektor vom Unterstützungspunkt zum Schwerpunkt ist. Das Drehmoment steht senkrecht zum Drehimpuls  $L$  und bewirkt daher nur eine Änderung der Richtung, nicht der Größe von  $L$  (Abb. 5.37). Während des Zeitintervalls  $dt$  ändert sich die Richtung von  $L$  um den Winkel  $d\varphi$ , und man entnimmt der Abb. 5.37,



**Abb. 5.37.** Drehmoment durch die Gewichtskraft bei einem Kreisel, der nicht im Schwerpunkt unterstützt wird



**Abb. 5.38.** Präzession eines Kinderkreisels

dass

$$|dL| = L d\varphi \rightarrow D = \frac{dL}{dt} = |L| \frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Drehimpulsrichtung (und damit auch die Figurenachse des Kreisels) drehen sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{L} = \frac{D}{I\omega} \quad (5.52)$$

um eine Achse senkrecht zur Ebene von  $D$  und  $L$ , wobei  $\omega_p \ll \omega$  angenommen wurde. Diese Bewegung heißt **Präzession**.

Bildet die Kreiselachse  $c$  den Winkel  $\alpha$  mit der Vertikalen, so ist der Betrag des Drehmomentes  $D = mgr \sin \alpha$ . Die Änderung  $dL$  des Drehimpulses ist jedoch jetzt für  $dL \ll |L|$  (Abb. 5.38)

$$dL = |L| \sin \alpha d\varphi,$$

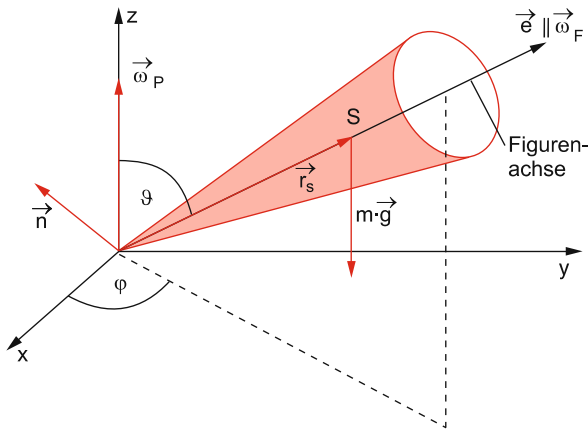
sodass für  $\omega_p \ll \omega$  wieder gilt:

$$\omega_p = \frac{mgr \sin \alpha}{I\omega \sin \alpha} = \frac{mgr}{I\omega}, \quad (5.53)$$

woraus man sieht, dass die Präzessionswinkelgeschwindigkeit  $\omega_p$  *unabhängig* von der räumlichen Orientierung der Kreiselachse ist und nur vom Drehimpuls  $L$  und dem Drehmoment  $D$  abhängt.

Die allgemeine Behandlung der Präzession, die auch gilt, wenn  $\omega_p$  nicht mehr klein gegen  $\omega$  ist, muss drei Vektoren berücksichtigen (Abb. 5.39):

1. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_F$  um die Figurenachse
2. Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit  $\omega_p$  um die vertikale  $z$ -Achse
3. Die Gesamtwinkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_F + \omega_p$ .



**Abb. 5.39.** Zur Herleitung der Bewegungsgleichung für den Kinderkreisel

Nach Abb. 5.39 gilt:

$$\begin{aligned}\omega_F &= \omega \cdot \mathbf{e} \quad \text{mit } \mathbf{e} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\} \\ \omega_P &= \dot{\varphi} \cdot \{0, 0, 1\} \\ \omega &= \{\omega \cdot \sin \theta \cos \varphi, \omega \cdot \sin \theta \sin \varphi, \omega \cdot \cos \theta + \dot{\varphi}\}.\end{aligned}\quad (5.53a)$$

Wir zerlegen  $\omega$  in die Komponenten  $\omega_{\parallel}$  parallel und  $\omega_{\perp}$  senkrecht zur Figurachse  $\mathbf{e}$ .

$$\begin{aligned}\omega_{\parallel} &= \mathbf{e} \cdot (\omega + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ \omega_{\perp} &= \mathbf{e} \times (\omega \times \mathbf{e}) \\ &= \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \{-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\}.\end{aligned}\quad (5.53b)$$

Der gesamte Drehimpuls ist

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= I_{\parallel} \omega_{\parallel} + (mr_s^2 + I_{\perp}) \omega_{\perp} \\ &= I_{\parallel} \cdot \mathbf{e} (\omega + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ &\quad + (I_{\perp} + mr_s^2) \\ &\quad \cdot \dot{\varphi} \sin \theta \{-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\}\end{aligned}\quad (5.53c)$$

wobei  $I_{\parallel}$  das Trägheitsmoment bei Rotation um die Figurachse ist und  $I_{\perp}$  um eine Achse  $\perp$  zur Figurachse. Die zeitliche Ableitung ergibt, weil  $\omega, \dot{\varphi}, \cos \theta, \sin \theta$  nicht von der Zeit abhängen, wenn wir  $\theta = \text{const}$  und konstantes  $\omega$  annehmen:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= I_{\parallel} (\omega + \dot{\varphi} \cos \theta) \cdot \dot{\mathbf{e}} \\ &\quad - (I_{\perp} + mr_s^2) \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\} \\ &= [I_{\parallel} \cdot \sin \theta (\omega + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{\varphi} \\ &\quad - (I_{\perp} + mr_s^2) \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta] \cdot \hat{\mathbf{n}}.\end{aligned}\quad (5.53d)$$

wobei  $\mathbf{n} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}$  der Einheitsvektor in Richtung des Drehmomentes ist. Da andererseits  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{D} = m \cdot \mathbf{g} \cdot r_s \cdot \sin \theta \cdot \hat{\mathbf{n}}$  ist, erhalten wir

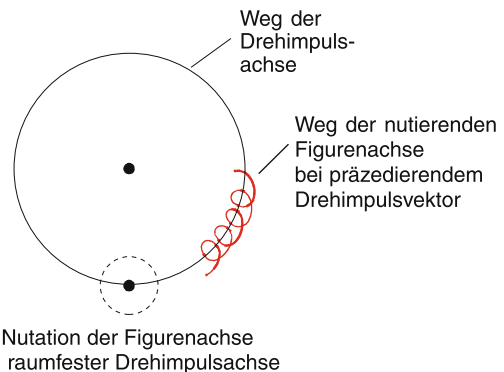
$$\omega_P \cdot I_{\parallel} \cdot \omega + \omega_P^2 \cos \theta (I_{\parallel} - I_{\perp}) = mgr_s. \quad (5.53e)$$

Sie hat zwei Lösungen für die Präzessionsfrequenz  $\omega_P$ , deren Differenz von der Differenz  $I_{\parallel} - I_{\perp}$  abhängt (siehe Goldstein, Klassische Mechanik und Webadresse [hschulz@itp.uni-hannover.de](mailto:hschulz@itp.uni-hannover.de)).

### 5.7.7 Überlagerung von Nutation und Präzession

Im allgemeinen Fall rotiert der Kreisel *nicht* um seine Figurachse. Ohne äußeres Drehmoment würde die Figurachse dann eine Nutationsbewegung um die raumfeste Drehimpulsachse machen. Unter Einwirkung des äußeren Drehmomentes präzediert die Drehimpulsachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_P$  um eine zur Krafrichtung parallele Achse durch den Auflagepunkt A, während die Figurachse eine Nutationsbewegung um die präzedierende Drehimpulsachse ausführt. Bei dieser Kombination von Präzession und Nutation durchläuft die Spitze der Figurachse eine komplizierte Bahn (Abb. 5.40), deren genaue Form vom Verhältnis der Nutationsfrequenz  $\Omega$  zur Präzessionsfrequenz  $\omega_P$  abhängt.

Zur Demonstration von Nutation und Präzession ist eine „kardanische“ Lagerung des Kreisels sehr geeignet, bei der die Figurachse des Kreisels in beliebige Richtungen gedreht werden kann, wobei der Kreisel immer „kräftefrei“ rotiert (Abb. 5.41). Dies erreicht man dadurch, dass die Kreiselachse auf Kugellagern in



**Abb. 5.40.** Bahn der Figurachse bei überlagerter Präzession und Nutation

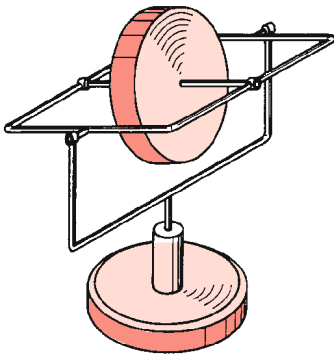


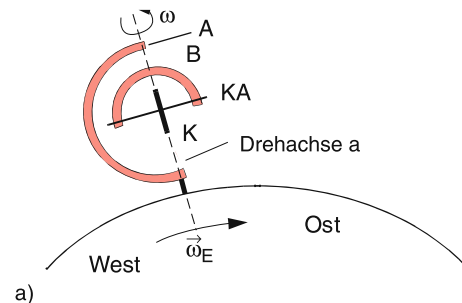
Abb. 5.41. Kardanisch aufgehängter Kreisel

einem Kreisring gelagert ist. Der Kreisring selbst ist in einem zweiten Kreisring gelagert und kann um eine Achse senkrecht zur Kreiselachse gedreht werden. Der zweite Kreisring kann schließlich noch um eine vertikale Achse gedreht werden. Dreht man das System um die vertikale Achse, so weicht die Kreiselachse aus ihrer horizontalen Lage aus. Umkehrung der Drehrichtung kehrt auch die Neigung der Kreiselachse um. Gibt man dem 1. Kreisring einen kurzen Schlag senkrecht zur Kreiselachse, so zwingt man die Drehimpulsachse in eine andere Richtung als die Figurenachse, und der Kreisel beginnt zu nutieren. Hängt man an den 1. Kreisring ein Gewicht, so wirkt ein Drehmoment auf den Kreisel und er präzediert, d. h. das System dreht sich um die vertikale Achse.

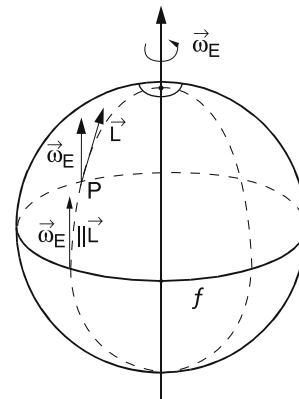
Die Präzession des Kreisels durch die Schwerkraft kann bei geeigneter Aufhängung des Kreisels zu Navigationszwecken verwendet werden (**Kreiselkompass**). Zu seinem Verständnis betrachten wir in Abb. 5.42 einen Kreisel, dessen Achse in einem Bügel  $B$  gelagert ist, der sich um eine vertikale Achse  $a$  durch den Aufhängepunkt  $A$  drehen kann. Die Kreiselachse  $KA$  selbst kann sich also nur in einer horizontalen Ebene drehen (gefesselter Kreisel). Der Schwerpunkt liegt unter dem Punkt  $A$ . Im Gegensatz zu einem freien kräftefreien Kreisel, der seine mit der Drehimpulsrichtung zusammenfallende Figurenachse zeitlich konstant halten würde, ist bei unserem gefesselten Kreisel die Aufhängeachse  $a$  starr mit der Erde verbunden, sie nimmt also an der Erdrotation teil und dreht sich mit deren Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_E$ . Dadurch wirkt ein Drehmoment  $\vec{D}$  senkrecht zur Zeichenebene auf den Kreisel, der sich so lange um die Achse  $a$  dreht, bis die Kreiselachse parallel zu  $\vec{\omega}_E$  steht, also in Nord-Süd-

Richtung zeigt. Dann sind Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  und die Richtung der Zwangsdrehung  $\vec{\omega}_E$  parallel (Abb. 5.42b), und damit wird das Drehmoment für die mögliche Drehung der Kreiselachse Null. Man kann sich dieses Verhalten am kardanischen Kreisel klar machen, indem man die Erdrotation durch eine Drehung des äußeren Ringes in Abb. 5.41 simuliert. Die Kreiselachse stellt sich dann senkrecht ein.

Am Äquator sind  $\vec{\omega}_E$  und  $\vec{L}$  parallel, in einem Punkt  $P$  auf einem anderen Breitenkreis ist dies nicht mehr möglich, da  $\vec{L}$  ja nur in einer horizontalen Ebene liegen kann. Jedoch stellt sich auch hier der Kreisel so ein, dass die Komponente von  $\vec{L}$  in Richtung  $\vec{\omega}_E$  maximal wird. Dann zeigt  $\vec{L}$  in Richtung des Längsmeridians, also wieder nach Norden. Nur an den beiden Polen versagt der Kreisel, da hier  $\vec{L}$  immer senkrecht zu  $\vec{\omega}_E$  steht [5.4].



a)



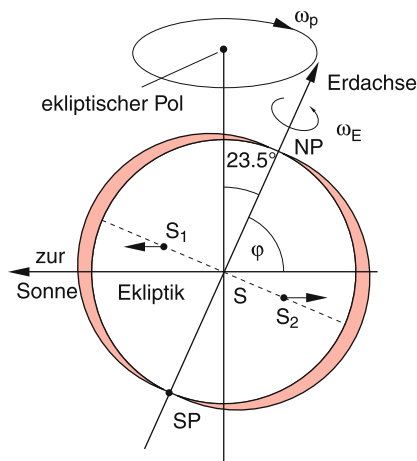
b)

Abb. 5.42a,b. Kreiselkompass: (a) Aufhängung, (b) Richtung von  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}_E$  am Äquator (Ä) und in höheren Breiten

## 5.8 Die Erde als symmetrischer Kreisel

Die Erde kann in guter Näherung durch ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, also durch einen oblaten symmetrischen Kreisel mit  $I_a = I_b < I_c$  beschrieben werden. Der Äquatordurchmesser ist mit 12756 km etwa 43 km größer als der Poldurchmesser von 12713 km. Diese Abplattung ist eine Folge der Zentrifugalkräfte bei der Rotation der Erde (siehe Abschn. 6.6). Man kann sich dieses abgeplattete Rotationsellipsoid zusammengesetzt denken aus einer Kugel und zusätzlichen „Wülsten“, die am Äquator ihre größte Dicke haben (schraffierte Flächen in Abb. 5.43).

Wegen der Neigung der Erdachse ( $\varphi = 90^\circ - 23,5^\circ = 66,5^\circ$ ) gegen die Ekliptik (Bahnebene der Erde) liegen die beiden Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der beiden der Sonne zugewandten bzw. abgewandten Wulsthälften auf verschiedenen Seiten der Ekliptik. Während für die im Schwerpunkt  $S$  vereinigte Masse der Kugel Zentripetalkraft  $F_1 = Gm_E M_S / r^2$  und Zentrifugalkraft  $F_2 = m_E v^2 / r$  im System der sich um die Sonne bewegendes Erde genau gleich sind, gilt dies nicht mehr für die Schwerpunkte der beiden Wulsthälften. Weil  $S_1$  näher zur Sonne liegt, überwiegt die Zentripetalkraft  $F_1$ , während für  $S_2$  die Zentrifugalkraft  $F_2$  überwiegt. Eine ähnliche Überlegung kann man für die vom Erdmond auf die Erde bewirkten Gravitationskräfte anstellen. Hierbei muss man aller-



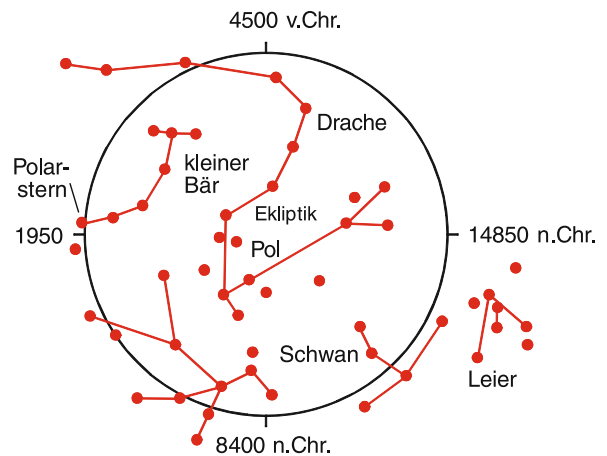
**Abb. 5.43.** Die Erde als symmetrischer Kreisel. Die Pfeile geben die Differenzkräfte  $F_1 - F_2$  in den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Wülste an

dings berücksichtigen, dass die Mondbahn um  $5,1^\circ$  gegen die Ekliptik geneigt ist. Die Einflüsse von Sonne und Mond auf die Präzession der Erdachse sind von gleicher Größenordnung.

Insgesamt wirkt also ein Drehmoment auf den Erdkreis, das eine Präzession der Erdachse bewirkt (lunar-solare Präzession). Diese umläuft die Normale zur Ekliptik auf einem Kegel mit  $2 \cdot 23,5^\circ$  Öffnungswinkel und zwar pro Jahr um den Winkel  $\varphi = 50,3878''$ , d. h. in 25 850 Jahren (platonisches Jahr) um den Winkel  $2\pi$ . In einem platonischen Jahr wird der Kegel also einmal voll umlaufen. Die Verlängerung der Erdachse durchläuft daher auf der Himmelsphäre einen Kreis um den ekliptischen Pol (Abb. 5.44).

### Anmerkung

Diese Präzession bewirkt übrigens auch, dass sich die Schnittlinie zwischen Äquatorebene und Ekliptik im Laufe von 25 850 Jahren um  $360^\circ$  dreht. Dies verschiebt den Frühlingspunkt entsprechend (siehe Abschn. 1.6) und hat zur Folge, dass sich die Sternbilder der Tierkreiszeichen zwischen ihrer Benennung vor 2000 Jahren und heute um etwa einen Monat verschoben haben. So deckt sich zur Zeit z. B. das reale Sternbild Zwillinge fast mit dem der Jahreszeit zugeordneten Tierkreiszeichen Krebs. Dies ist vielen Astrologen unbekannt. Sie kommen dadurch in



**Abb. 5.44.** Aufgrund der Präzession durchläuft die Verlängerung der Erdachse auf der Himmelsphäre einen Kreis um den ekliptischen Pol. Im Jahre 1950 zeigte sie fast auf den Polarstern

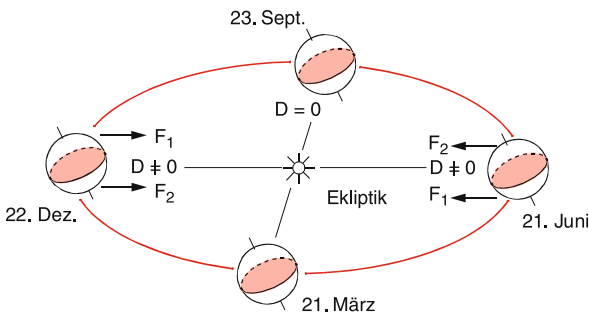
Schwierigkeiten, wenn sie erklären sollen, ob die *wirklichen* Sterne oder nur die *Namen* der Tierkreiszeichen für die Menschenschicksale eine Rolle spielen.

Die oben beschriebene Präzession ist allerdings aus folgenden Gründen nicht gleichmäßig:

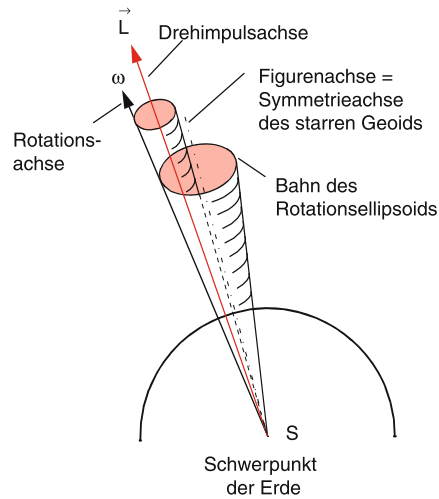
- Bei der Bewegung der Erde um die Sonne (Abb.5.45) bleibt das von der Sonne bewirkte Drehmoment  $\mathbf{D}$  nicht konstant. Es ist maximal am 22. Dezember und am 21. Juni und minimal am 21. März und 23. September.
- Der Mond, der sich in einer gegen die Ekliptik um etwa  $5^\circ$  geneigten Ebene um die Erde bewegt, bewirkt ebenfalls ein Drehmoment auf die abgeplattete Erde. Auch dieses Drehmoment ändert sich mit der Zeit, weil sich die Neigung der Mondbahnebene gegen die Äquatorebene mit einer Periode von 9,3 Jahren verändert.
- Auch die anderen Planeten bewirken ein (allerdings sehr kleines) Drehmoment und tragen daher zur Präzession der Erdachse geringfügig bei.

In der Astronomie werden diese kurzperiodischen Schwankungen der Präzession als **Nutation** bezeichnet, obwohl sie im physikalischen Sinne keine „echten“ Nutationen, sondern Störungen der durch Sonne, Mond und Planeten bewirkten Präzession sind.

Dieser komplizierten Präzessionsbewegung überlagert sich noch folgende echte Nutation: Bei der Rotation der Erde fallen Figurenachse  $\mathbf{c}$  und momentane Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  nicht genau zusammen, sodass, auch im physikalischen Sinne, eine echte kräftefreie Nutati-



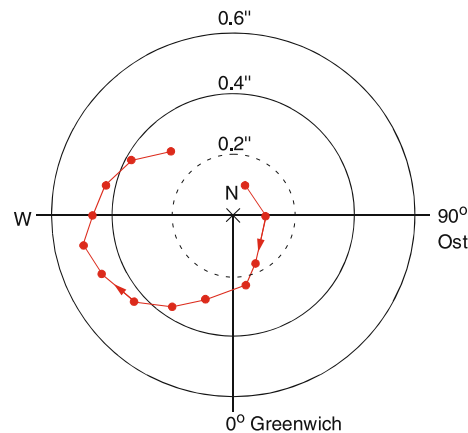
**Abb. 5.45.** Variation des von der Sonne auf die Erde ausgeübten Drehmomentes während des Erdumlaufes um die Sonne. Man beachte, dass die Richtung der Erdachse (abgesehen von der sehr langsamen Präzession) während des Umlaufes konstant ist



**Abb. 5.46.** Nutation der Erdachse

on auftritt (Abb.5.46). Die Figurenachse rotiert daher (im gleichen Drehsinn wie die Rotation  $\boldsymbol{\omega}$ ) um die präzedierende Drehimpulsachse mit einer gemessenen Periode von  $T = 305$  Tagen. Andererseits folgt aus (5.49) für die Nutationsperiode:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \frac{I_a}{I_c - I_a} . \quad (5.54)$$



**Abb. 5.47.** Wanderung des Nordpols der Erdrotationsachse während des Jahres 1957 um den während der Jahre 1900–1905 bestimmten Mittelwert  $N$ . 1 Bogensekunde entspricht etwa 30 m



Man kann daher aus der gemessenen Nutationsperiode die Differenz  $I_c - I_a$  der Trägheitsmomente bestimmen [5.5].

Da die Erde kein starrer Körper ist, können sich die Trägheitsmomente (z. B. durch Erdbeben oder durch konvektive Strömungen der flüssigen Materie im Erdinneren [5.6]) zeitlich ändern. Dies führt zu einer kleinen Änderung der Nutation.

Abbildung 5.47 zeigt die Wanderung des Nordpols der Erd-Rotationsachse im Verlauf des Jahres 1957.

Man sieht aus diesem Beispiel, dass eine Beschreibung der Erdbewegung um so mehr Einflüsse berücksichtigen muss, je genauer die Messdaten werden. Auch heute noch wird über das beste Modell diskutiert [5.7, 8].

## ZUSAMMENFASSUNG

- Beim Modell des ausgedehnten starren Körpers werden alle inneren Bewegungen im Körper (Schwingungen und Verformungen) vernachlässigt. Der Schwerpunkt hat die Koordinaten
 
$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV \text{ für } \varrho = \text{const.}$$
- Die Bewegung eines freien starren Körpers lässt sich immer zusammensetzen aus der Translation seines Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_S$  und der Rotation des Körpers um diesen Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ . Der Körper hat daher sechs Freiheitsgrade der Bewegung.
- Für die Bewegung eines ausgedehnten Körpers sind nicht nur Größe und Richtung der wirkenden Kraft wichtig, sondern auch ihr Angriffspunkt am Körper.
- Eine beliebige, am ausgedehnten Körper angreifende Kraft kann zerlegt werden in eine Kraft, die am Schwerpunkt angreift (Translationsbeschleunigung) und einem Kräftepaar (Rotationsbeschleunigung).
- Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Rotationsachse durch den Schwerpunkt, ist durch  $I_S = \int_V r_\perp^2 \varrho dV$  gegeben, wobei  $r_\perp$  der senkrechte Abstand des Volumenelementes  $dV$  von der Rotationsachse ist. Bezüglich einer beliebigen parallelen Achse im Abstand  $a$  von der Achse durch den Schwerpunkt ist es  $I = I_S + Ma^2$ , wobei  $M$  die Gesamtmasse des Körpers ist.
- Die kinetische Energie der Rotationsbewegung ist  $E_{\text{rot}} = 1/2 I \omega^2$ .
- Für einen Körper, der sich um eine raumfeste Achse dreht, lautet die Bewegungsgleichung:  $D_\parallel = I \cdot d\omega/dt$ , wobei  $D_\parallel$  die Komponente des Drehmomentes parallel zur Drehachse ist.
- Das Trägheitsmoment  $I_S$  hängt ab von der Richtung der Drehachse im Körper. Man kann es als Tensor schreiben. Die Richtungen der Achsen mit größtem und kleinstem Trägheitsmoment bestimmen das Hauptachsensystem. In ihm wird der Trägheitsmomententensor diagonal. Die Diagonalelemente sind die Hauptträgheitsmomente.
- Sind zwei der drei Hauptträgheitsmomente gleich, so ist der Körper ein symmetrischer Kreisel, sind alle drei gleich, so liegt ein Kugelkreisel vor.
- Drehimpuls  $\mathbf{L}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  eines freien rotierenden Körpers sind durch  $\mathbf{L} = \tilde{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$  miteinander verknüpft.  $\tilde{I}$  ist der Trägheitstensor, der im Hauptachsensystem Diagonalform hat. Im Allgemeinen sind  $\mathbf{L}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  *nicht* parallel.
- Rotiert der Körper um eine Hauptträgheitsachse, so sind  $\mathbf{L}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  parallel und, ohne äußere Drehmomente, beide raumfest.
- Bei beliebiger Richtung von  $\boldsymbol{\omega}$  nutiert die momentane Drehachse (= Rotationsachse  $\boldsymbol{\omega}$ ) um die (ohne äußeres Drehmoment) raumfeste Drehimpulsachse (Nutation).
- Unter der Wirkung eines äußeren Drehmomentes präzediert die Drehimpulsachse und zusätzlich nutiert die momentane Drehachse um die Drehimpulsachse. Es gilt:  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{D}$ .



- Die Bewegung eines solchen Kreises wird durch die Eulerschen Gleichungen vollständig beschrieben.
- Unsere Erde kann angenähert als symmetrischer Kreisel beschrieben werden, der um die Achse seines größten Trägheitsmoments rotiert. Sonne, Mond und Planeten bewirken ein resultierendes äußeres Drehmoment, sodass die Erdachse

eine Präzessionsbewegung vollführt mit einer Präzessionsperiode von 25 850 Jahren. Außerdem bewirken zeitliche Veränderungen der Massenverteilung innerhalb der Erde eine (kleine) Richtungsdivergenz zwischen Symmetrieachse und momentaner Drehachse. Deshalb führt die Drehachse eine unregelmäßige Nutationsbewegung um die Symmetrieachse aus.

## ÜBUNGSAUFGABEN

1. Man berechne den Schwerpunkt  $S$  eines homogenen Kugelsektors (Radius der Kugel  $R$ , halber Öffnungswinkel des Sektors sei  $\alpha$ ).
2. Wie groß sind Trägheitsmoment, Drehimpuls und Rotationsenergie der Erde,
  - a) wenn ihre Dichte  $\varrho_0$  als homogen angenommen wird?
  - b) wenn für  $r \leq R/2$  die homogene Dichte  $\varrho_1$  doppelt so hoch ist wie  $\varrho_2$  für  $r > R/2$ ?
  - c) Wie würde sich die Winkelgeschwindigkeit der Erde ändern, wenn alle Menschen ( $n = 5 \cdot 10^9$  à 70 kg) zur selben Zeit synchron am Äquator nach Osten mit der Beschleunigung  $a = 2 \text{ m/s}^2$  zu laufen beginnen würden?
3. Eine zylindrische Scheibe mit dem Radius  $R$  und der Masse  $M$  dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10 \text{ s}^{-1}$  um die Zylinderachse ( $R = 10 \text{ cm}$ ,  $M = 0,1 \text{ kg}$ ).
  - a) Berechnen Sie Drehimpuls  $L$  und Rotationsenergie  $E_{\text{rot}}$ .
  - b) Ein Käfer der Masse  $m = 10 \text{ g}$  fällt senkrecht auf den Rand der rotierenden Scheibe und hält sich dort fest. Wie groß sind nun  $\omega$ ,  $L$  und  $E_{\text{rot}}$ ?
  - c) Der Käfer kriecht nun langsam in radialer Richtung zum Mittelpunkt der Scheibe. Wie groß sind nun  $\omega(r)$ ,  $J(r)$  und  $E_{\text{rot}}(r)$  als Funktion seines Abstandes  $r$  vom Mittelpunkt?
4. Die Dichte  $\varrho$  eines Kreiszylinders (Radius  $R$ , Höhe  $H$ ) nehme gemäß  $\varrho(r) = \varrho_0(1 + (r/R)^2)$  mit dem Abstand  $r$  von der Figurenachse zu.
  - a) Wie groß ist sein Trägheitsmoment bei Rotation um die Figurenachse, wenn  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $\varrho_0 = 2 \text{ kg/dm}^3$  sind?
  - b) Wie lange braucht der Zylinder, um auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 10^\circ$  aus einer Höhe von  $h = 1 \text{ m}$  herabzurollen?
5. Man berechne die Rotationsenergie des  $\text{Na}_3$ -Moleküls, das aus drei Na-Atomen ( $m = 23 \text{ AMU}$ ) besteht, die ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Scheitelwinkel  $\alpha = 79^\circ$  und einer Schenkellänge  $d = 0,32 \text{ nm}$  bilden, bei Rotation um jeweils eine der drei Hauptträgheitsachsen mit dem Drehimpuls  $L = \sqrt{I \cdot (I + 1)} \hbar$ .
6. Eine anfangs ruhende hölzerne Stange der Länge  $L = 0,4 \text{ m}$  und der Masse  $M = 1 \text{ kg}$  kann sich um eine zur Stange senkrechte vertikale Achse durch den Schwerpunkt  $S$  drehen. Das Ende der Stange wird von einem Geschoss ( $m = 0,01 \text{ kg}$ ) mit der Geschwindigkeit  $v = 200 \text{ m/s}$  getroffen, das sich horizontal, senkrecht zur Stange und zur Drehachse, bewegt und im Holz stecken bleibt. Wie groß sind Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Rotationsenergie  $E_{\text{rot}}$  der Stange nach dem



Stoß? Welcher Bruchteil der kinetischen Energie des Geschosses ist in Wärme umgewandelt worden?

7. Eine homogene Scheibe mit der Masse  $m$  und dem Radius  $R$  rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  um eine feste Achse durch  $S$  senkrecht zur Scheibenebene. Zur Zeit  $t = 0$  beginnt ein Drehmoment  $D = D_0 e^{-at}$  zu wirken. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit

$\omega(t)$ ? Zahlenbeispiel:  $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $a = 0,1 \text{ s}^{-1}$ ,  $D_0 = 0,2 \text{ Nm}$ .

8. Ein Vollzylinder und ein dünnwandiger Hohlzylinder mit gleicher Masse und gleichen Außenradien rollen mit gleicher Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  auf einer horizontalen Ebene und danach eine schiefe Ebene hinauf. Bei welcher Höhe  $h$  kehren sie um? (Reibung vernachlässigt). Zahlenbeispiel:  $R = 0,1 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 15 \text{ s}^{-1}$ .

### 10.3 Nutation des symmetrischen momentenfreien Kreisel

Kreisel sind punktförmig gelagerte, um eine Achse durch ihren Schwerpunkt drehbare Körper.<sup>1</sup> Die Bewegungsformen eines Kreisels sind äußerst interessant und in mancher Hinsicht unerwartet. Sie bilden die Grundlage zum Verständnis der Bewegung „atomarer Kreisel“ unter der Einwirkung von elektrischen und magnetischen Feldern. Hier sollen nur die einfachsten mechanischen Kreisel betrachtet werden.

Die folgende Darstellung beschränkt sich auf symmetrische Kreisel. Ein Kreisel ist dann symmetrisch, wenn sein Trägheitstensor eine besonders ausgezeichnete Achse, das Trägheitsellipsoid also Rotationssymmetrie besitzt. Es soll gelten

$$J_x \neq J_y, J_z; \quad J_x = J_y. \quad (10.20)$$

In Fig. 10.7 sieht man den Schnitt durch einen Kreisel, für den  $J_z$  das größte Trägheitsmoment darstellt, also  $J_z > J_x = J_y$ . Das damit eingeführte Koordinatensystem  $(x, y, z)$  ist ein Körpersystem, dessen  $z$ -Achse die *Figurenachse* des Kreisels markiert. Es ist sein Hauptachsensystem, das bei der Besprechung des Trägheitstensors mit (1), (2) und (3) bezeichnet wurde.

Des weiteren werden die durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\omega}$  charakterisierte *momentane Drehachse* und die durch den Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  gegebene *Drehimpulsachse* auftreten. Man hat es also insgesamt mit drei Achsen zu tun,

1. der Figurenachse  $\vec{z}$ ,
2. der momentanen Drehachse  $\vec{\omega}$  und
3. der Drehimpulsachse  $\vec{L}$ .

Zunächst soll angenommen werden, daß der Kreisel *momentenfrei* gelagert ist. Von außen sollen keine Drehmomente angreifen können, insbesondere nicht das Schweredrehmoment. Dies erreicht man durch Lagerung des Krei-

<sup>1</sup> In erweitertem Sinn sind auch völlig frei drehbare Körper ohne jegliche Lagerung als Kreiselkörper anzusehen.

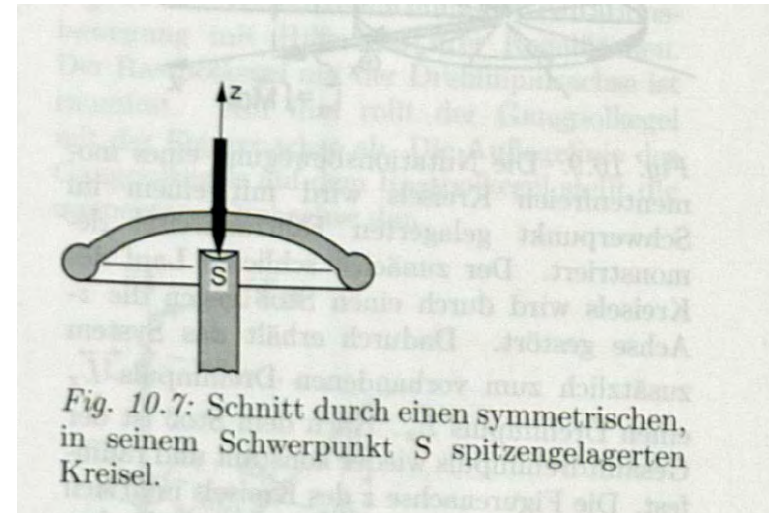


Fig. 10.7: Schnitt durch einen symmetrischen, in seinem Schwerpunkt S spitzengelagerten Kreisel.

sels im Schwerpunkt. Der Drehimpulserhaltungssatz stellt dann sicher, daß der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  nach *Betrag und Richtung* konstant ist:

$$\vec{M}_a = 0 \quad \leadsto \quad d\vec{L}/dt = 0 \quad \leadsto \quad \vec{L} = \text{const.} \quad (10.21)$$

Die einfachste Kreiselbewegung liegt dann vor, wenn die drei genannten Achsen  $\vec{z}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  zusammenfallen. Der Kreisel dreht sich dann um eine Hauptträgheitsachse. Wir haben den *schlichten Lauf* des Kreisels. Der Kreisel „steht“ im Raum. Am schönsten ist dies mit einem Kreisel im *kardaniischen Gehänge*<sup>2</sup> demonstrierbar (Fig. 10.8), in dem man den rotierenden Kreisel spazierentragen kann, ohne die einmal ausgerichtete Kreiselachse zu verändern. Der Kreisel hängt dabei in einer Halterung A, die im Ring B um die Achse (1) frei drehbar ist; der Ring B ist wiederum um die Achse (2) drehbar im Gestell C gelagert. Die beiden zueinander senkrechten Drehachsen (1) und (2) gestatten die Einstellung der Kreiselachse in jede beliebige Richtung. Alle Achsen verlaufen durch den Kreisel-schwerpunkt.



Durch einen kurzen Stoß gegen die Figurenachse kann ein schlicht laufender, momentenfreier Kreisel in eine *Nutationsbewegung* versetzt werden: Die drei genannten Achsen werden durch den Stoß getrennt. Die Figurenachse bewegt sich dann – gut sichtbar – auf einem Kegelmantel. Einzelheiten der Nutationsbewegung werden an dem in Fig. 10.9 gezeigten Fahrradkreisel erläutert, der in seinem Mittelpunkt gelagert ist.

Der schlicht laufende Kreisel besitzt zunächst nur die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_z$  und den dazu parallelen Drehimpuls

$$\vec{L}_z = J_z \cdot \vec{\omega}_z. \quad (10.22)$$

Der Stoß  $\vec{S}_F = \int \vec{F} dt$  möge in negativer  $y$ -Richtung gegen die Figurenachse  $\hat{z}$  erfolgen. Er entspricht einem Momentenstoß  $\vec{S}_M = \int \vec{M} dt$  in  $x$ -Richtung, denn der Kreisel wird ja im Mittelpunkt festgehalten. Er erhält dadurch zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_x$  und den damit verknüpften Drehimpuls

$$\vec{L}_x = \vec{S}_M = \int \vec{M} dt = J_x \cdot \vec{\omega}_x. \quad (10.23)$$

Da die  $x$ -Achse auch eine Hauptachse des Trägheitstensors darstellt, sind  $\vec{\omega}_x$  und  $\vec{L}_x$  ebenfalls parallel zueinander gerichtet. Wäre der Kreisel vor dem Stoß in Ruhe gewesen, würde er sich mit  $\omega_x$  um die  $x$ -Achse drehen. Die nun aber wirklich vom Kreisel ausgeführte Bewegung entspricht der Überlagerung der beiden Drehbewegungen. Die beiden Winkelgeschwindigkeiten addieren sich zur Gesamtwinkelgeschwindigkeit, die beiden Teildrehimpulse zum Gesamtdrehimpuls.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_z; \quad \vec{L} = J_x \cdot \vec{\omega}_x + J_z \cdot \vec{\omega}_z. \quad (10.24)$$

Wegen  $J_x \neq J_z$  sind die beiden Vektoren  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  nun nicht mehr parallel zueinander und auch nicht mehr parallel zur Figurenachse  $\hat{z}$ . Nach erfolgtem Stoß ist der Kreisel wieder momentenfrei und folglich der Drehimpuls nach Betrag und Richtung konstant. Der Drehimpulsvektor markiert die

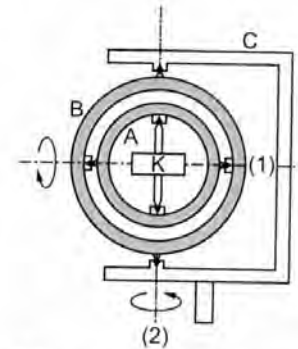


Fig. 10.8: In einer sogenannten kardanischen Aufhängung ist ein Kreisel im Schwerpunkt gelagert. Bei genügend präziser Ausführung der Spitzenlager kann die Bewegung des rotierenden Kreiselkörpers von einer Bewegung der äußeren Halterung  $C$  nicht mehr beeinflusst werden.

*raumfeste Drehimpulsachse.* Da sich der Kreiselkörper aber in jedem Augenblick um die momentane Drehachse  $\vec{\omega}$  (also weder um  $\vec{\omega}_x$  noch um  $\vec{\omega}_z$ ) dreht, können sich diese und die Figurenachse  $\hat{z}$  nur auf Kegelmänteln um die raumfeste Drehimpulsachse herum bewegen. Nur der Nutationskegel, den die Figurenachse beschreibt, ist im Experiment sichtbar. Die ebenfalls zeitlich unveränderliche Rotationsenergie

$$E_k^{(rot)} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{J} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega_{\parallel} \cdot L = \text{const.} \quad (10.25)$$

zeigt, daß bei konstantem Drehimpuls  $\vec{L}$  nur die zu ihm parallele Komponente  $\omega_{\parallel}$  der Winkelgeschwindigkeit konstant sein kann; die Senkrecht-komponente  $\omega_{\perp}$  muß ihre Richtung ständig ändern. Mit Hilfe der Poinsot-Konstruktion macht man sich leicht klar, daß bei einem symmetrischen Kreisel die drei Vektoren  $\hat{z}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  stets in einer Ebene liegen. In Fig. 10.10 ist das die  $x, z$ -Ebene.

<sup>2</sup> Geronimo Cardano 1501–1576

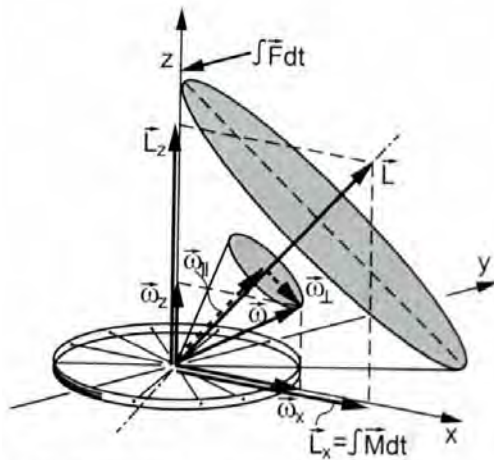


Fig. 10.9: Die Nutationsbewegung eines momentenfreien Kreisels wird mit einem im Schwerpunkt gelagerten Fahrradkeisel demonstriert. Der zunächst schlichte Lauf des Kreisels wird durch einen Stoß gegen die  $z$ -Achse gestört. Dadurch erhält das System zusätzlich zum vorhandenen Drehimpuls  $\vec{L}_z$  einen Drehimpuls  $\vec{L}_x$ . Nach dem Stoß ist der Gesamtdrehimpuls wieder konstant und raumfest. Die Figurenachse  $\hat{z}$  des Kreisels muß sich auf einem Kreiskegel um die Drehimpulsachse  $\vec{L}$  herumbewegen.

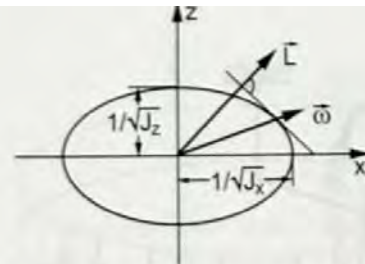


Fig. 10.10: Trägheitsellipsoid eines symmetrischen Kreisels mit  $\hat{z}$  als Figurenachse; der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf der im Durchstoßpunkt der momentanen Drehachse  $\vec{\omega}$  angelegten Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid. Der die Nutationsbewegung des Kreisels einleitende Stoß gegen die Achse führt zur Auffächerung der drei Achsen  $\hat{z}$ ,  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$ , die aber stets in einer gemeinsamen Ebene liegen.

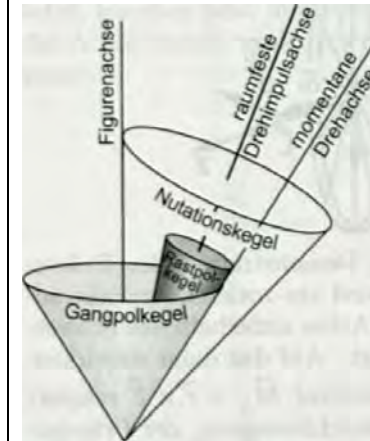


Fig. 10.11: Veranschaulichung der Nutationsbewegung mit Hilfe von drei Kegelflächen. Der Rastpolkegel mit der Drehimpulsachse ist raumfest. Auf ihm rollt der Gangpolkegel mit der Figurenachse ab. Die Auflagelinie des Gangpolkegels auf dem Rastpolkegel stellt die momentane Drehachse dar.

Führt man nun zu dem Nutationskegel der Figurenachse und dem Rastpolkegel der momentanen Drehachse noch einen mit der Figurenachse fest verbundenen Gangpolkegel ein, dann versteht man die Nutationsbewegung einfach durch das Abrollen des Gangpolkegels auf dem (im Raum „festgerasteten“) Rastpolkegel, deren gemeinsame Mantellinie die momentane Drehachse bildet (Fig. 10.11).

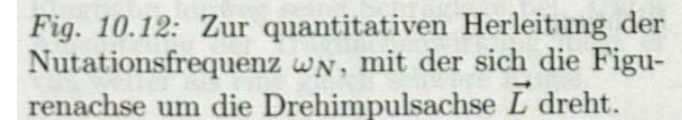


angeben kann. Die dadurch in Gang gesetzte Nutation erfolgt mit der Kreisfrequenz

$$\omega_N = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\omega_{z+}} \cdot \frac{|d\vec{\omega}_z|}{dt}. \quad (10.27)$$

$$\omega_N = \frac{\omega_x \omega_z}{\omega_{z\perp}} = \frac{\omega_x}{\sin \beta} = \frac{\omega_x L}{L_x},$$
$$\text{Nutationskreisfrequenz: } \omega_N = \frac{L}{J_x} \quad (10.28)$$

4



## 10.4 Präzession des symmetrischen Kreisels

Wird der Kreisel schließlich der Einwirkung eines äußeren Drehmoments ausgesetzt, indem man ihn z. B. nicht mehr im Schwerpunkt lagert, dann muß sich nach dem Drehimpulssatz sein Drehimpuls ständig ändern. Eine solche Änderung kann i. allg. auf mehrfache Weise geschehen. Zerlegt man den Drehimpuls gemäß

$$\vec{L} = \underline{J} \cdot \vec{\omega} = \underline{J} \cdot \omega \cdot \hat{\omega} \quad (10.29)$$

in drei Faktoren, dann liefert die zeitliche Differentiation drei Glieder:

$$\vec{M}_a = \frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\underline{J}}{dt} \cdot \omega \cdot \hat{\omega}}_{(1)} + \underbrace{\underline{J} \cdot \hat{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt}}_{(2)} + \underbrace{\underline{J} \cdot \omega \cdot \frac{d\hat{\omega}}{dt}}_{(3)}. \quad (10.30)$$

Das bedeutet: Das von außen angreifende Drehmoment  $\vec{M}_a$  kann bewirken:

1. daß sich bei konstantem  $\omega$  der Trägheitstensor  $\underline{J}$  ändert, sei es dadurch, daß sich die Massenverteilung des Körpers relativ zur Drehachse ändert, d. h. sich Teile verschieben, oder daß die Drehung des Körpers um eine Nicht-Hauptträgheitsachse erfolgt und die Elemente des Tensors zeitabhängig werden. Dies sei hier ausgeschlossen,  $\leadsto d\underline{J}/dt = 0$ ;
2. daß sich der Betrag der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ändert. Dieser Fall liegt vor, wenn der Kreisel angetrieben oder abgebremst wird.  $\vec{M}_a$  muß dann parallel oder antiparallel zur Figurenachse liegen. Auch das soll hier nicht sein; der einmal angetriebene Kreisel soll unbeeinflusst weiterrotieren.  $\leadsto d\omega/dt = 0$ .

Dann verbleibt nur noch,

3. daß sich die Richtung  $\hat{\omega}$  der Winkelgeschwindigkeit ändert. Genau das passiert hier:

$$\vec{M} = \vec{M}_a = \underline{J} \cdot \omega \cdot \frac{d\hat{\omega}}{dt}. \quad (10.31)$$

Wir nehmen wieder den Fahrradkreisel (Fig. 10.13), dessen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit wieder in  $z$ -Richtung zeigen mögen, und hängen ihn (z. B. an der  $x$ -Achse) so auf, daß sein Gewicht  $\vec{F}_G = m\vec{g}$  ein Drehmoment  $\vec{M}_a$  ausüben kann, das dann in  $-y$ -Richtung zeigt. Im Experiment stellt man fest, daß der Kreiselkörper langsam um die Aufhängeachse rotiert.

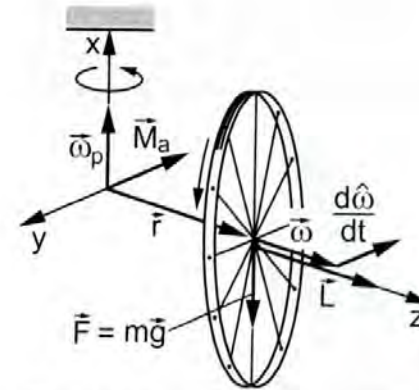


Fig. 10.13: Zur Demonstration der Präzessionsbewegung wird ein rotierender Fahrradkreisel an seiner Achse außerhalb des Schwerpunkts aufgehängt. Auf das dann einwirkende Schweredrehmoment  $\vec{M}_a = \vec{r} \times \vec{F}$  reagiert er mit einer Ausweichbewegung, der Präzession. Der Drehimpulssatz  $\vec{M}_a = d\vec{L}/dt$  fordert eine ständige Richtungsänderung des Drehimpulsvektors, die dem wirkenden Drehmoment parallel gerichtet ist:  $d\vec{L} \parallel \vec{M}_a$ .

Er fällt also keineswegs herunter, wie man es bei einem nicht-rotierenden Körper erwartet, sondern führt eine Präzessionsbewegung aus. Er weicht senkrecht zur wirkenden Kraft aus, genau wie es Gl. (10.31) behauptet: Der Vektor  $d\hat{\omega}$  der Richtungsänderung der Winkelgeschwindigkeit ist dem von außen angreifenden Drehmoment  $\vec{M}_a$  parallel gerichtet.

Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_p$  der Präzession ist unmittelbar angebbar, wenn man die Drehung von  $\vec{\omega}$  in der  $(y, z)$ -Ebene betrachtet (Fig. 10.14):

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|d\hat{\omega}|}{dt}. \quad (10.32)$$



Mit Hilfe von Gl. (10.31) gelangt man damit zur

$$\text{Präzessionskreisfrequenz } \omega_p = \frac{M_a}{L} = \frac{M_a}{J\omega} \quad (10.33)$$

Dies kann man mit Hilfe von Fig. 10.13 auch vektoriell ausdrücken:

$$\vec{M}_a = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad (10.34)$$

Diese Gleichung gilt auch dann, wenn  $\vec{\omega}_p$  und  $\vec{L}$  nicht mehr so schön senkrecht aufeinander stehen wie bei dem besprochenen einfachen Fahrradkreisel-Beispiel.

Präzession und Nutation, die hier getrennt behandelt wurden, treten bei Kreisel, die nicht im Schwerpunkt gelagert sind, i. allg. gleichzeitig auf. Wenn man z. B. bei dem in Fig. 10.13 skizzierten Experiment die Kreiselachse (z-Achse) zunächst festhält und dann plötzlich losläßt, vollführt sie eine Nickbewegung, die eine Überlagerung von Präzession und Nutation darstellt (Fig. 10.15). Hieran erkennt man auch sehr schön, woher die kinetische Energie für die Präzessionsbewegung kommt: aus der potentiellen Lageenergie des Kreiselkörpers, nicht etwa auf dunklen Kanälen aus der Rotationsenergie des Kreisel selbst. Immer wenn sich die Spitze der Kreiselachse nach unten neigt, kommt die Präzessionsbewegung in Gang; sie stoppt wieder, wenn die Achse nach oben geht. Man hat also eine Schwingungsbewegung, einen ständigen Wechsel zwischen potentieller Energie und Präzessions-Rotationsenergie vorliegen.

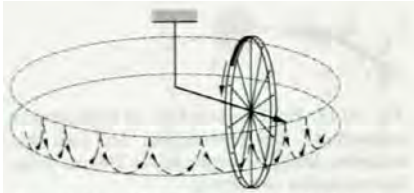


Fig. 10.15: Ein einseitig außerhalb seines Schwerpunkts aufgehängter Fahrradkreisel, dessen Achse man auf der anderen Seite plötzlich losläßt, führt gleichzeitig eine Nutations- und eine Präzessionsbewegung aus. Das plötzliche Angreifen des Schweredrehmoments wird vom System wie ein Stoß empfunden: Nutation und Präzession werden in Gang gesetzt, kommen aber durch ein Rückschwingen der Achse immer wieder zur Ruhe (Nickbewegung).

## 10.5 Beispiele zur Kreiselbewegung

### (a) Freihändiges Fahrradfahren

Der Drehimpuls der Räder hilft dem Fahrer per Drehimpulserhaltungssatz die Balance zu halten. Beim Freihändigfahren stabilisiert er die Lage des Vorderrades. Leichtes Kippen des Fahrrades (Drehmoment  $\vec{M}$ , Fig. 10.16) läßt das Vorderrad mit  $\vec{\omega}_p$  präzedieren: Es dreht sich in die gewünschte Fahrtrichtung. (Man muß allerdings festhalten: Beim Fahrrad ist der Winkel, unter dem die Lagerung der Vorderradgabel am Rahmen angebracht ist, wichtig. Das Vorderrad kippt auch schon beim stehenden Fahrrad in die richtige Richtung, wenn man es zur Seite neigt.)

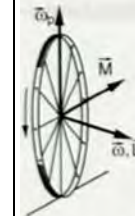


Fig. 10.16: Beim Freihändigen Fahrradfahren lenkt man das Fahrrad mit Hilfe der Präzession des Vorderrades.

### (b) Diskus

Einer Diskusscheibe erteilt man beim Abwurf einen Drall  $\vec{L}$ . Dieser stabilisiert die Scheibe im Flug, so daß sie weitgehend ihre Lage beibehält. Die Tragflächenwirkung verleiht ihr eine Wurfweite, die beträchtlich größer ist als die einer mit gleicher Geschwindigkeit geworfenen Kugel zum Beispiel. Die anströmende Luft versucht, die Diskusfläche senkrecht zur Strömung zu drehen. Wegen des großen Drehimpulses macht sich eine Präzessionsbewe-



Fig. 10.17: Ein schwerer rotierender Diskus führt wegen seines großen Drehimpulses im Flug nur eine sehr geringfügige Präzessionsbewegung aus und behält fast über die ganze Flugbahn hinweg seine Schräglage bei. Unter Ausnutzung der Tragflächenwirkung fliegt er viel weiter als eine gleich schwere Kugel.

gung aber kaum bemerkbar (Gl. 10.33). – Im Gegensatz dazu ist die Präzession einer etwa gleich großen Pappscheibe (Bierdeckel), die man auch im Hörsaal werfen kann, wesentlich größer (etwa gleiches Drehmoment durch die anströmende Luft, aber kleiner Drehimpuls wegen geringer Masse). Die Pappscheibe hat sich lange vor Beendigung der Flugbahn bereits um 90° gedreht. Dann hört die Tragflächenwirkung sofort auf: Die Scheibe stürzt ab.

### (c) Drall von Geschossen

Bei länglichen Geschossen, z. B. einem Speer, ist man an einer möglichst tangentialen Lage zur Flugbahn interessiert, damit das Ziel mit der Spitze des Geschosses erreicht wird und nicht etwa mit der Breitseite. Man verleiht ihnen daher einen Drall um die Längsrichtung. Die anströmende Luft übt ein Drehmoment aus und erzwingt eine Präzessionsbewegung der Geschößspitze, die sie immer nahe bei der gewünschten Flugbahn hält. In Fig. 10.19 ist die Präzessionsbewegung stark übertrieben.



Fig. 10.18: Ein Bierdeckel ist als Diskusersatz ungeeignet. Der Drehimpuls, den man ihm mitgeben kann, ist wegen seines kleinen Trägheitsmoments nur gering.



Fig. 10.19: Durch einen Drall um die Längsachse werden Speere auf ihrer Flugbahn stabilisiert.

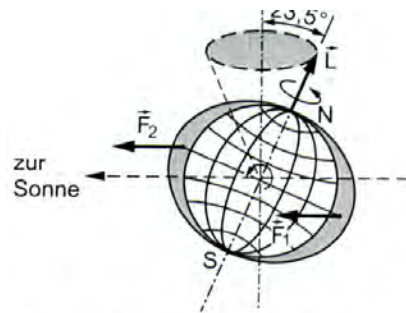


Fig. 10.20: Die Abweichung des Erdkörpers von der Kugelgestalt hat durch das von der Sonnenanziehung herrührende Drehmoment ( $F_2 > F_1$ ) eine sehr langsame Präzessionsbewegung zur Folge.

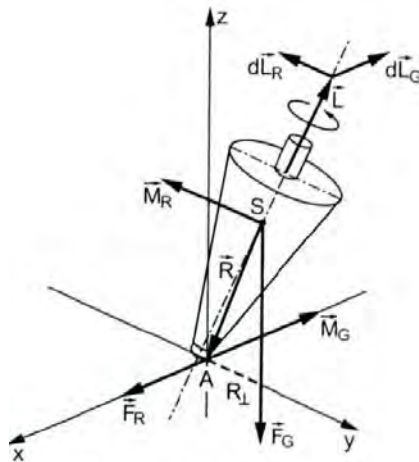


Fig. 10.21: Ein kegelförmiger Kinderkreisel dreht sich auf einem abgerundeten Fuß. Sein Tanzen stellt eine Präzessionsbewegung dar. (Erklärung siehe Text).

#### (d) Erde als Kreisel

Die Erde ist ein abgeplattet-ellipsoidförmiger Körper. Sie dreht sich einmal pro Tag um sich selbst, besitzt also einen Drehimpuls  $\vec{L}$ , der von Süden nach Norden gerichtet ist. Da die Erdachse gegen die Ebene der Ekliptik (Ebene der Bahnellipse) geneigt ist, entsteht durch die Anziehungskraft der Sonne ein Drehmoment, das die Erdachse „aufzurichten“ versucht. Die Erdkreisel-Achse weicht senkrecht zur Kraftwirkung aus und beschreibt einen Präzessionskegel mit  $23,5^\circ$  halbem Öffnungswinkel, der in 26 000 Jahren einmal umfahren wird.

#### (e) Spielkreisel

Die Bewegungsformen von Kreiseln werden noch vielfältiger, wenn Reibungseffekte mit hinzukommen. So kann man bereits das „Tanzen“ und „Aufstehen“ eines Spielkreisel ohne Berücksichtigung der Reibung nicht verstehen. Ein solcher kegelförmiger Kreisel besitzt einen runden Nagelkopf am spitzen Ende, auf dem er in kreis- oder spiralförmigen Bahnen auf ebenen Flächen tanzt. Er besitzt also keine raumfeste Lagerung. Nach dem Antreiben beginnt er seinen Lauf meist in mehr oder weniger starker Schräglage, etwa wie in Fig. 10.21 gezeichnet. Man stellt aber fest, daß er sich bereits nach kurzer Zeit aufrichtet. Im Gegensatz zur Erfahrung, daß sich selbst überlassene Körper ihren Schwerpunkt so tief wie möglich legen, versucht der Kreisel seinen Schwerpunkt  $S$  möglichst hoch über den Auflagepunkt  $A$  zu erheben. Zwei Kräfte bzw. Drehmomente bestimmen seine Bewegung. Die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft  $F_G$  versucht mit dem Drehmoment  $M_G = F_G \cdot R_\perp$  den Kreisel umzukippen. Sein Drehimpuls  $\vec{L}$  bewahrt ihn davor; die Kreiselachse weicht senkrecht zur Kraft, d. h. senkrecht zur  $(y, z)$ -Ebene, aus ( $\sim$  Drehimpulsänderung  $d\vec{L}_G \parallel \vec{M}_G$ ); das ist die Ursache für eine Präzessionsbewegung. Außerdem aber greift im Auflagepunkt  $A$  eine Reibungskraft  $\vec{F}_R$  an, im Beispiel der Fig. 10.21 in  $x$ -Richtung; das ergibt ein Drehmoment  $\vec{M}_R = \vec{R} \times \vec{F}_R$  um den Schwerpunkt,



das eine Drehimpulsänderung  $d\vec{L}_R$  erzwingt, die parallel zu  $\vec{M}_R$  gerichtet ist, also in der  $(y, z)$ -Ebene liegt; der Kreisel richtet sich auf! Das tut er nicht mehr, wenn man die Reibung dadurch ausschaltet, daß man ihn nicht auf einem runden Nagelkopf, sondern auf einer feinen Spitze laufen läßt; er kann nun nicht mehr tanzen; man schafft es kaum, ihm einen so großen Drall zu geben, daß er wenigstens ein bis zwei Präzessionsumläufe ausführen kann. Der Kreisel fällt schnell um.

#### (f) Atomare Kreisel

Viele Atome besitzen einen Drehimpuls  $\vec{L}$  und ein damit verknüpft magnetisches Moment  $\vec{m}$ . Dies sind Eigenschaften, die sie besitzen wie ihre Masse und die man ihnen genauso wenig wie diese nehmen kann, ohne sie zu zerstören. Das magnetische Moment macht das Atom zu einer kleinen „Magnetnadel“, die sich in einem Magnetfeld parallel zu den Feldlinien einzustellen trachtet. Der Drehimpuls macht das Atom aber auch zu einem kleinen Kreisel – und der reagiert auf die Drehmomentenwirkung des äußeren Magnetfelds mit einer Präzessionsbewegung. Das Atom präzediert mit seinem Drehimpuls um die Richtung des Feldes.

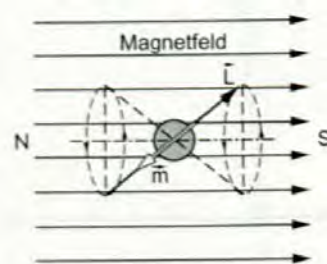


Fig. 10.22: Präzessionsbewegung eines Atoms mit dem Drehimpuls  $\vec{L}$  und dem magnetischen Moment  $\vec{m}$  in einem Magnetfeld.

## 10.6 Zusammenfassung

Rollbewegung		
kinetische Energie	$E_k = E_k^{(trans)} + E_k^{(rot)}$ $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_M\omega^2$ $= \frac{1}{2}J_A\omega^2$	M: Schwerpunktsachse, A: momentane Drehachse.
Haftreibungskraft	$F_{HR} = \gamma \cdot F_{treib}$	$\gamma = \frac{J_M/mr^2}{1 + J_M/mr^2},$ $\gamma = 1/3 \quad \text{Vollzylinder,}$ $\gamma = 2/7 \quad \text{Kugel.}$
Kreisel		
Nutations-Kreisfrequenz	$\omega_N = L/J_x$	L: Drehimpuls, $J_x$ : Trägheitsmoment ⊥ Kreiselachse.
Präzessions-Kreisfrequenz	$\omega_p = M_a/L \sin \vartheta$ $\vec{M}_a = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$	$M_a$ : äußeres Drehmoment, $\vartheta = \angle(\vec{\omega}, \vec{L})$