Stark Effekt

Betrachte Wasserstoffatom im elektrischen Feld: $H = H_0 + e\vec{E}\vec{r}$

Zur Vereinfachung wähle $\vec{E} = E\vec{e}_z \quad \rightsquigarrow \quad V = eE \cdot r\cos\vartheta$

Erinnerung: $\psi_{2p}(r,\vartheta,\varphi)$ in Basis $|\overbrace{n,l}^{\text{Radialteil}},m\rangle$ darstellbar, $\underbrace{l,m}_{\text{Winkelanteil}}$

- Für Winkelanteil: $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ mit:

  Orthonormierung: $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}^* Y_{l'm'} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

  Komplexe Konjugation: $Y_{lm}^* = (-1)^{-m} \, \cancel{\ldots} \, Y_{l-m} \quad \to Y_{lm}^* = Y_{l-m}$ (m gerade), $Y_{l0}^* = Y_{l0}$

  $Y_{00} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad Y_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\vartheta, \quad Y_{1\pm1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\vartheta \, e^{\pm i\varphi}$

  * $Y_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \, P_l^m(\cos\vartheta) \, e^{im\varphi}$

- Radialteil: $R_{10} = \sqrt{\frac{4}{a_0^3}} \, e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$

  $R_{20} = \frac{1}{\sqrt{8a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$

- Energieniveaus: $E_n = -\frac{R}{n^2} \quad \to$ Entartungsgrad n^2 $(l \in [0,n-1]\cap\mathbb{N}_0,$ $m \in [-l,l]\cap\mathbb{Z})$

Grundzustand: Entartungsgrad $g = 1^2 = 1 \rightsquigarrow$ nicht entartet

$\to E_1^{(1)} = \langle 100|V|100\rangle$ Winkelanteil V: $\cos\vartheta = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,Y_{10}$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |R_{10}(r)|^2 eEr \; \underbrace{Y_{00}^*(\vartheta,\varphi)}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} \, 2\sqrt{\tfrac{\pi}{3}} \, Y_{10}(\vartheta,\varphi) \, Y_{00}(\vartheta,\varphi) \, r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \int_0^\infty |R_{10}(r)|^2 eEr^3 \frac{1}{\sqrt{3}} \, dr \; \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{10} Y_{00} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{=\delta_{10}\delta_{00}=0}$$

$$= 0$$

Angeregte Zustände: Entartungsgrad $g = n^2$, $n > 1 \to g > 1$

$\to$ 1. angeregter Zustand: Entartungsgrad 4, $n=2$, $(l,m) \in \{(0,0),(1,0),(1,\pm1)\}$

$\to$ da n eindeutig: keine Mischung durch R_{nl}

um V zu diagonalisieren genügt Winkelteil:

$\langle 2lm|V|2l'm'\rangle$: Diagonalelemente: $|\psi|^2$ ist gerade Fkt., $r\cos\vartheta$ ist ungerade Fkt.

$\to \int |\psi|^2 r\cos\vartheta \, d^3r = 0$

m,m'-Komponente: V unabhängig von φ, $\to \varphi$ geht nur mit in

$\to \varphi$-Integration liefert $\delta_{mm'}$

$\to$ keine Mischung von Zuständen mit versch. m

Mischung möglich zwischen $(l,m) = (0,0)$ und $(1,0)$

$\to$ in Basis $\{|200\rangle, |210\rangle, |21-1\rangle, |211\rangle\}$ ist $\langle 2lm|V|2l'm'\rangle$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Submatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \text{ hat EWe } \pm\Delta \text{ mit EVen } \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ Energiekorr. $\pm\Delta$: $\Delta = C\int_0^\infty R_{20}^*(r)\, r \, R_{21}(r) \, r^2 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{Y_{00}}_{=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}} \cdot \underbrace{Y_{10}}_{\cos\vartheta} Y_{10}(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$

$$= \frac{C}{2\sqrt{\pi}} \, C_r a_0^4 \underbrace{\int_0^\infty \rho^4 (2-\rho) e^{-\rho} \, d\rho}_{=-72} \; \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{10}^* Y_{10} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{=1} = -3E \cdot e \cdot a_0$$

$$= -\frac{72\, C\, C_r}{2\sqrt{\pi}} a_0^4$$