Harmonische Störung

Zeitabhängige Störung, deren Zeitabhängigkeit berechnet werden kann:

$V(t) = \hat{V} \cos \omega t$ ab einem Zeitpunkt t_i

$$P_{m \leftarrow n} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0 < t_i}^{t} \underbrace{\langle m | \hat{V}_I \cos \omega t' | n \rangle}_{\text{Wechselwirkungsbild}} dt' \right|^2$$

$V = 0 \ \forall\, t < t_i$

Wechselwirkungsbild $\Rightarrow \langle m | V_I | n \rangle = V_{mn} \cdot e^{i \overbrace{\frac{E_m - E_n}{\hbar}}^{= \omega_{mn}} t}$

$$= \frac{1}{\hbar^2} |V_{mn}|^2 \left| \int_{t_i}^{t} e^{i \omega_{mn} t'} \left(\frac{e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}}{2} \right) dt' \right|$$

$$= \frac{1}{4\hbar^2} |V_{mn}|^2 \left| \frac{1}{i \underbrace{(\omega_{mn} + \omega)}_{= \Omega_+}} e^{i(\omega_{mn} + \omega) t_i} \left(e^{i(\omega_{mn} + \omega) \Delta t} - 1 \right) + \frac{1}{i \underbrace{(\omega_{mn} - \omega)}_{= \Omega_-}} e^{i(\omega_{mn} - \omega) t_i} \left(e^{i(\omega_{mn} - \omega) \Delta t} - 1 \right) \right|^2$$

schnelle oszillierende Terme $\propto \cos \omega (t_i + t) [\cos \omega \Delta t - \cos \omega_{mn} \Delta t]$ vernachlässigen

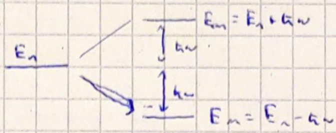
$$\approx \frac{1}{4\hbar^2} |V_{mn}|^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{\Omega_+}{2} \Delta t}{(\Omega_+ / 2)^2} + \frac{\sin^2 \frac{\Omega_-}{2} \Delta t}{(\Omega_- / 2)^2} \right)$$

$$\approx \frac{2\pi}{4\hbar} |V_{mn}|^2 \left(\delta(E_m - E_n + \hbar\omega) + \delta(E_m - E_n - \hbar\omega) \right) \Delta t$$

„Zustandsdichten"

$$\approx \frac{2\pi}{2\hbar} |V_{mn}|^2 \left(\mathcal{J}(E_n - \hbar\omega) + \mathcal{J}(E_n + \hbar\omega) \right) \Delta t$$

$$\rightarrow \Gamma_{m \leftarrow n} = \frac{2\pi}{2\hbar} |V_{mn}|^2 \left(\mathcal{J}(E_n - \hbar\omega) + \mathcal{J}(E_n + \hbar\omega) \right)$$



$\Rightarrow$ Auch hier kommt die Energie nicht von der Störung (i.e. das Matrixelement) sondern von deren Dynamik