Ladungskonjugation

Gesucht ist die Wellenfunktion die der Diracgl. mit konjugierter (VZ wechsel) Ladung folgt:

$$\left[\gamma^\mu \left(p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu\right) - mc\right] \psi^c = 0 \qquad \text{Ladungskonjugierte Diracglg}$$

Schreibt man die Diracglg mit der kovarianten Ableitung, so fällt auf, dass man zwischen p und A ein relatives VZ bekommt, wenn man die Gleichung komplex konjugiert:

$$0 = \left(\left[i\hbar \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu\right) - mc\right] \psi\right)^* = \left[-i\hbar (\gamma^\mu)^* \left(\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu\right) - mc\right] \psi^*$$

$$= \left[-(\gamma^\mu)^* \left(p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu\right) - mc\right] \psi^*.$$

So sieht der kanonische Impuls schon so aus wie bei der geforderten Gleichung.

ψ_c sollte also mit ψ^* zusammenhängen. Da dabei die Normierung nicht geändert werden sollte, ist nun eine unitäre Matrix (im Spinor-Hilbertraum) gesucht, für die gilt:

$$\psi_c = U_c \psi^* \quad \Leftrightarrow \quad \psi^* = U_c^{-1} \psi_c$$

Diese Matrix muss ~~Elemente~~ im Spin-Hilbertraum wirken, da ~~GR~~ alle Größen aus der Raumzeit (i.e. der kanonische Impuls $p + \frac{q}{c}A$ und der Massenterm) bereits die gesuchte Form besitzen

$$\Rightarrow \left[p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu, U_c^{-1}\right] = 0 \qquad \cancel{\text{und}}$$

$$0 = \left[-(\gamma^\mu)^* U_c^{-1} \left(p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu\right) - mc\, U_c^{-1}\right] \psi_c$$

~~Bs.~~ Um nun ~~stets~~ den Massenterm wieder in der ursprünglichen Form zu haben kann von links mit U_c multipliziert werden.
Der Term mit den γ-Matrizen kann man dann noch mit der gesuchten Glg. vergleichen und erhält die letzte Forderung an U_c:

$$-U_c (\gamma^\mu)^* U_c^{-1} \stackrel{!}{=} \gamma^\mu \qquad \text{mit} \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \overbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_0}^{\in \mathbb{R}^{2\times2}} \\ \underbrace{i\sigma_2 \otimes \sigma_i}_{\in \mathbb{R}^{2\times2}} \end{pmatrix}$$

Aus der Definition der γ-Matrizen fällt auf, dass nur γ^2 von der komplexen Konjugation betroffen ist.

~~Außerdem gilt γ~~ Außerdem gilt für γ^i mit $i \in \{1,2,3\}$:

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \qquad \text{und} \qquad \gamma^2 \in i\mathbb{R}^{4\times4} \text{ ist rein komplex,}$$

$$(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0 \qquad \text{und} \qquad (\gamma^i)^{-1} = -\gamma^i$$

Test, ob γ^2 geeignet für U_c:

$$-\gamma^2 (\gamma^2)^* (-\gamma^2) = \{-\underbrace{\gamma^2\}(-\gamma^2)}_{=1}(-\gamma^2) = +\gamma^2 \quad ; \quad \gamma^2 \gamma^0 (-\gamma^2) = (i\sigma_2 \otimes \sigma_2)(\sigma_3 \otimes \sigma_0)(i\sigma_2 \otimes \sigma_2)$$

$$= -(\sigma_3 \otimes \sigma_0) = -\gamma^0$$

wäre geeignet, wenn man durch das 2-fache anwenden ein zusätzliches „–" bekäme:

$$\text{Test: } U_c = i\gamma^2 \Rightarrow U_c U_c = i\gamma^2 \cdot i\gamma^2 = \gamma^2 \cdot (-\gamma^2) = 1 \Rightarrow U_c = U_c^{-1}$$

$$\Rightarrow -i\gamma^2 (-\gamma^2) i\gamma^2 = \gamma^2 (-\gamma^2) \gamma^2 = \gamma^2 \quad ; \quad -i\gamma^2 \gamma^i i\gamma^2 \stackrel{i \neq 2}{=} (i\sigma_2 \otimes \sigma_2)(i\sigma_2 \otimes \sigma_i)(i\sigma_2 \otimes \sigma_2)$$

$$-i\gamma^2 \gamma^0 i\gamma^2 = \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 = \gamma^0 \qquad = -i\sigma_2 \otimes \sigma_2 \cdot i\varepsilon_{j2k}\sigma_k$$

$$= i\sigma_2 \otimes \varepsilon_{j2k}\varepsilon_{2ki}\sigma_i = i\sigma_2 \otimes \sigma_j = \gamma^j$$

Ergebnis: $\Rightarrow \psi_c = i\gamma^2 \psi^*$