Potentialstufe

$$V(x) = V_0 \, \Theta(x)$$

→ SG auf beiden Seiten separat lösen!

$V(x<0)=0$ → freie Welle, $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \psi(x) = E\psi(x)$, $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Nach rechts (ein-) fließender Teil (Ae^{ikx}); Reflektierter Teil (Be^{-ikx})

Es fließt nur (Netto-) Strom, wenn einfließender ≠ reflektierter Strom:

Def. Reflexionskoeff.: $R = \left|\frac{j_{ref}}{j_{ein}}\right| = \left| \frac{\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_r^* \frac{\partial \psi_r}{\partial x} - \psi_r \frac{\partial \psi_r^*}{\partial x}\right)}{\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_e^* \frac{\partial \psi_e}{\partial x} - \psi_e \frac{\partial \psi_e^*}{\partial x}\right)} \right|$

$$= \left| \frac{-ik|B|^2 - ik|B|^2}{ik|A|^2 - (-ik)|A|^2} \right| = \left|\frac{B}{A}\right|^2$$

$V(x>0) = V_0$ → Freie Wellen mit reduzierter Energie:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \psi(x) = (E-V_0)\psi(x)$, $\psi(x) = Ce^{ik'x}$ (Nach links propagierender Teil physikalisch quatsch)

komplex für $E<V_0$ → $k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$$j_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_t^* \frac{\partial \psi_t}{\partial x} - \psi_t \frac{\partial \psi_t^*}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left(ik'|C|^2 e^{i(k'-k'^*)x} + ik'^*|C|^2 e^{i(k'-k'^*)x}\right)$$

$$= \frac{\hbar |C|^2}{2m} \underbrace{(k'+k'^*)}_{=2\,\mathrm{Re}\{k'\}} e^{\overbrace{i(k'-k'^*)}^{=2i\,\mathrm{Im}\{k'\}}x} = \frac{\hbar}{m}|C|^2 \,\mathrm{Re}\{k'\} e^{-2\,\mathrm{Im}\{k'\}x}$$

Da für $E<V_0$ k' rein imaginär ist, gilt $j_{trans} = 0$

Da für $E>V_0$ k' rein reell ist, gilt $j_{trans} = \frac{\hbar k'}{m}|C|^2$

Def. Transmissionskoeff. $T = \left|\frac{j_{trans}}{j_{ein}}\right| = \frac{k'}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2$

→ Annahme: Der Strom ist kontinuierlich → $\partial_t \psi^*\psi = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial j}{\partial x}dx = j(x\to\infty) - j(x\to-\infty) = j_{trans} - (j_{ein} + j_{ref})$ (s.o. entgegengesetzt)

$\Leftrightarrow |j_{trans}| = |j_{ein}| - |j_{ref}| \quad | : |j_{ein}|$

$$T = 1 - R$$

Anschlussbedingung an: $\psi(0^-) = \psi(0^+)$ ⇒ $A+B = C$

Da endliches Potential: $\psi'(0^-) = \psi'(0^+)$ ⇒ $k(A-B) = k'C$ ⇔ $A-B = \frac{k'}{k}C$

$\Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2}{1+\frac{k'}{k}}$, $\frac{B}{A} = \frac{1-k'/k}{1+k'/k}$, $k'/k = \sqrt{1-\frac{V_0}{E}}$

$\Rightarrow T = \frac{4k'/k}{(1+k'/k)^2}$, $R = \left(\frac{1-k'/k}{1+k'/k}\right)^2$

Siehe → Kontinuitätsgleichungen (Übersicht)