Der Harmonische Oszillator (Lösung)

$\hat{H} = \sum_i \hbar\omega_i (\hat{N}_i + 1/2)$, $\hat{N}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i$, $[\hat{N}_j, \hat{a}_i] = -\delta_{ji}\hat{a}_j$, $[\hat{N}_j, \hat{a}_i^+] = \delta_{ji}\hat{a}_j^+$

$\hat{N}$ hermitesch und $[\hat{H}, \hat{N}_i] = 0$ (da $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = [\hat{N}_i, \hat{N}_j] = \ldots = 0$ $(i \neq j)$)

Eigenwertgleichung von $\hat{N}$:

$$\hat{N}_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle$$

Umformen $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^+$

$$\hat{N}_i \hat{a}_i |n_i\rangle = \hat{a}_i \hat{N}_i |n_i\rangle + [\hat{N}_i, \hat{a}_i]|n_i\rangle = n_i \hat{a}_i |n_i\rangle - \hat{a}_i |n_i\rangle = (n_i - 1)\hat{a}_i |n_i\rangle$$

$$\hat{N}_i \hat{a}_i^+ |n_i\rangle = \hat{a}_i^+ \hat{N}_i |n_i\rangle + [\hat{N}_i, \hat{a}_i^+]|n_i\rangle = n_i \hat{a}_i^+ |n_i\rangle + \hat{a}_i^+ |n_i\rangle = (n_i + 1)\hat{a}_i^+ |n_i\rangle$$

$\Rightarrow$ $\hat{a}_i |n_i\rangle$, bzw. $\hat{a}_i^+ |n_i\rangle$ sind auch Eigenfunktionen von $\hat{N}_i$ und besitzen die EWe $n_i - 1$, bzw. $n_i + 1$

$\Rightarrow$ $\hat{a}_i |n_i\rangle = c|n_i - 1\rangle$, $\hat{a}_i^+ |n_i\rangle = \tilde{c}|n_i + 1\rangle$

Bestimmung c, $\tilde{c}$ durch Matrixelemente:

$$\left.\begin{aligned} \langle n_i | \underbrace{\hat{a}_i^+ \hat{a}_i}_{=\hat{N}_i} | n_i \rangle &= n_i \langle n_i | n_i \rangle &&= n_i \\ &= |c|^2 \langle n_i - 1 | n_i - 1 \rangle &&= |c|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{n_i}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle n_i | \hat{a}_i \hat{a}_i^+ | n_i \rangle &= \langle n_i | (\hat{N}_i + 1) | n_i \rangle &&= (n_i + 1)\underbrace{\langle n_i | n_i \rangle}_{=1} \\ &= \langle n_i + 1 | n_i + 1 \rangle |\tilde{c}|^2 &&= |\tilde{c}|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{c} = \sqrt{n_i + 1}$$

Der Absteigeoperator $\hat{a}_i$ verringert den Eigenzstd. von $\hat{N}_i$ (und damit von $\hat{H}$) um 1:

$$\hat{a}_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i}\, |n_i - 1\rangle$$

Der Aufsteigeoperator $\hat{a}_i^+$ erhöht den Eigenzstd von $\hat{N}$ ––– um 1:

$$\hat{a}_i^+ |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1}\, |n_i + 1\rangle$$

Sowohl Potential als auch kinetische Energie besitzen nur quadratische Operatoren und sollten daher pos. definit sein.

Da die Zustände jedoch beliebig herabgesetzt werden können, sofern n_i keine ganze Zahl ist und somit $\hat{a}_i |n_i\rangle$ irgendwann (bei $\hat{a}_i |0\rangle = 0$) wird, könnten die Energien negativ werden.

$\Rightarrow$ n_i müssen ganze Zahlen sein

Die Eigenenergien des harm. Osz. sind somit $E_n = \sum_i \hbar\omega_i (n_i + 1/2)$

Eigenfunktionen:

$$0 = \langle r_i | \hat{a}_i | 0 \rangle = \sqrt{\frac{m\omega_i}{2\hbar}} \langle r_i | \hat{r}_i + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_i | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_i + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) \psi_0(\xi_i) \quad \Rightarrow \quad \psi_0(\xi_i) = A_0 e^{-\xi_i^2/2}$$

$\hat{=}$ $\xi_i = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r_i$ $\hat{=}$ Normierung

$|1\rangle = \hat{a}^+ |0\rangle$

$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^+ |1\rangle$

$\vdots$

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$ $\rightarrow$ $\psi_n(\xi) = \frac{A_0}{\sqrt{2^n n!}} \left(\xi_i - \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)^n e^{-\xi_i^2/2} = A_n e^{-\xi_i^2/2} H_n(\xi_i)$

n-tes Hermite-polynom