Natürliche Stärke einer Störung

Idee: • Wenn Problem tatsächlich von H_0 dominiert wird, sollte die Störung auf der charakteristischen Längenskala von H_0 klein sein

Vorgehen: • Schreibe V so um, dass $V = \Delta E_0 \cdot V_{\text{dimlos}}(\vec{r}_{\text{dimlos}})$

→ V_{dimlos} dann dimensionslose Funktion, die von dimensionslosen Größen abhängt

→ Üblicherweise ist $V_{\text{dimlos}} = \underset{\text{Koeffizient, konstant}}{\Gamma}\, f_{\text{dimlos}}$

Interpretation: • Γ kann dann als Störparameter λ aufgefasst werden, da dann gilt:

$$H = H_0 + \underset{\text{eine dimensionslose Konstante}}{\Gamma} \cdot \underbrace{\Delta E_0 \cdot f_{\text{dimlos}}(\vec{r}_{\text{dimlos}})}_{\text{ein Potential}}$$

→ Wenn $\Gamma \ll 1$ hat Störungstheorie eine Chance

Beispiel: Anharmonischer Oszillator:

$$H = H_0 + \underbrace{\gamma x^3}_{=V}, \quad H_0 = \underbrace{\hbar\omega}_{=\Delta E_0}\left(\hat{n} + \tfrac{1}{2}\right), \quad \hat{x} = \underbrace{\sqrt{\tfrac{\hbar}{m\omega}}}_{=\xi}\,\frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow [\gamma] = \frac{J}{m^3}, \quad [x] = m$$

$$V = \gamma x^3 = \underbrace{\hbar\omega}_{=\Delta E_0} \cdot \underbrace{\frac{\gamma}{\hbar\omega}\xi^3}_{=\Gamma} \underbrace{\left(\frac{x}{\xi}\right)^3}_{f(x_{\text{dimlos}})}$$

→ Wenn $1 \gg \Gamma = \frac{\gamma}{\hbar\omega}\xi^3 = \gamma \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{m}^3 \sqrt{\omega}^5}$

$$\Leftrightarrow \gamma \ll \sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}$$

ist $H \approx H_0$ und Störungstheorie kann ~~...~~ versucht werden

→ trotzdem keine Garantie, insbesondere kann für andere Längenskalen die Störung dominieren

→ Wenn eigentliche Längenskala von H nicht gleich ist, wie die von H_0 bringt diese Abschätzung nichts

Achtung:

Die Störungstheorie kann immer noch schiefgehen, i.e. die Reihenentwicklungen für ψ, E können immer noch divergieren

→ Die natürliche Stärke ist keine Garantie, dass ST funktioniert, aber wenn bereits die natürliche Stärke $\Gamma \gg 1$ hat ST von vornherein keine Chance!