Die Kontinuitätsgleichungen (Übersicht)

- Dirac: $\partial_\mu j^\mu = 0$, $j^\mu = \begin{pmatrix} c\psi^\dagger\psi \\ c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = \gamma_0\vec{\gamma}$

  $= c\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi$

  aus j^0: $\rho = \psi^\dagger\psi = |\psi_0|^2 + |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2$

  $\rightarrow$ Pauli: $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{j} = c(\chi^\dagger\vec{\sigma}\varphi + \varphi^\dagger\vec{\sigma}\chi)$ 1

  Da $|\chi| \ll |\varphi|$ gilt für die Dichte $\rho \approx \varphi^\dagger\varphi$

- Klein-Gordon: $\partial_\mu j^\mu = 0$, $j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^* D^\mu\psi - \psi(D^\mu\psi)^*\right]$

  $= \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right] - \frac{q}{mc}A^\mu\psi^*\psi$

  $= \begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{2mc}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) - \frac{q}{mc}\phi\psi^*\psi \\ \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) - \frac{q}{mc}\vec{A}\psi^*\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

  aus j^0: $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\underbrace{(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*)}_{= 2i\,\mathrm{Im}\{\psi^*\partial_t\psi\}} - \frac{q}{mc^2}\phi\psi^*\psi$

  $= -\left(\frac{\hbar}{mc^2}\mathrm{Im}\{\psi^*\partial_t\psi\} + \frac{q\phi}{mc^2}|\psi|^2\right)$

  $\rightarrow$ ist <u>nicht</u> positiv definit! $\rightsquigarrow$ Dichteinterpretation quatsch

- Schrödinger: $\partial_t\rho + \nabla\vec{j} = 0$, $\rho = \psi^*\psi$

  Unter Verwendung von $\cdot\ \partial_t\psi^* = \frac{i}{\hbar}(H\psi)^*$, $\partial_t\psi = -\frac{i}{\hbar}H\psi$

  $\cdot\ \psi(V\psi)^* = \psi V\psi^* = \psi^* V\psi$

  mit der min. Kopplung $\vec{\pi} = \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}$ $\cdot\ \vec{A} = \vec{A}^*$

  Ergibt sich $-\partial_t\rho = \frac{1}{2m\hbar i}\left[\psi\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi^* - \psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi\right]$

  $= \frac{i}{2m\hbar}\Big[\psi\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi^*\right) + \psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi\right)$

  $+ \psi\left(\frac{q}{c}\vec{A}\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi^*\right) - \psi^*\left(\frac{q}{c}\vec{A}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi\right)\Big]$

  Rest kürzt sich $= -\nabla\underbrace{\frac{1}{2m}\left[\psi\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi^* + \psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi\right]}_{= \vec{j}}$

  $\Rightarrow \rho = \psi^*\psi$, $\vec{j} = \frac{1}{2m}\Big[\psi\underbrace{\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi^*}_{= [(p - \frac{q}{c}\vec{A})\psi]^*} + \psi^*\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi}_{= (p - \frac{q}{c}\vec{A})\psi}\Big]$

  $[\vec{A}] = \frac{Vs}{m}$

  $= \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right] - \frac{q}{cm}\vec{A}\psi^*\psi$

1 $\rightarrow$ Pauli: $\vec{j} = c(\chi^\dagger\vec{\sigma}\varphi + \varphi^\dagger\vec{\sigma}\chi)$

nutze $\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{2mc}\varphi$, $\chi^\dagger = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi)^\dagger}{2mc} = \frac{(\vec{\pi}\varphi)^\dagger\vec{\sigma}^{\dagger = \vec{\sigma}}}{2mc} = \frac{\vec{\pi}^*\varphi^\dagger}{2mc}\vec{\sigma}$

$= \frac{\vec{\sigma}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\varphi}{2mc}$ $= \frac{\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\varphi^\dagger\vec{\sigma}}{2mc}$ Achtung: für σ, π gleiche Indizes

$j_j = c\frac{1}{2m}\Big[\left(\left(-\frac{\hbar}{i}\partial_i - \frac{q}{c}A_i\right)\varphi^\dagger\right)\sigma_i\sigma_j\varphi + \varphi^\dagger\sigma_j\sigma_i\left(\frac{\hbar}{i}\partial_i - \frac{q}{c}A_i\right)\varphi$

$\vec{j} = +\frac{i\hbar}{2m}(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi^*) - \frac{q}{mc}\vec{A}\varphi^\dagger\varphi + \frac{\hbar}{2m}\nabla\times\varphi^\dagger\vec{\sigma}\varphi$ $\leftarrow$ für Kontinuitätsgleichung irrelevant $(\nabla\cdot(\nabla\times\ldots) = 0)$

Letzte Term in Pauli-Glg:

$$\vec{j} \propto \dots + \frac{\hbar}{2m} \nabla \times \varphi^\dagger \vec{\sigma} \varphi$$

$$\rightarrow \vec{j}_q \propto \dots + c \underbrace{\frac{q\hbar}{2mc}}_{= -\mu_B \text{ für } q = -e} \nabla \times \varphi^\dagger \vec{\sigma} \varphi$$

$$= c \nabla \times \left(-\mu_B \varphi^\dagger \vec{\sigma} \varphi \right)$$

Da ~~für~~ mit der Magnetisierung gilt (klassisch):

$\vec{j}_q = c \cdot \nabla \times \vec{M}$ folgt $\vec{M}_{\text{elektron}} = -\mu_B \varphi^\dagger \vec{\sigma} \varphi$

Der Term kann also als die durch den Spin hervorgerufene Magnetisierung des Elektrons interpretiert werden