Probleme der Klein-Gordon-Glg:

- **Negative Energien** (schwierig interpretierbar):

Betrachte $\vec{A} = \vec{0}$, $\phi = 0$ und Separationsansatz $\psi(x_\mu) = \phi_0(t)\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\hbar^2 \psi(x^\mu_\mu)} \left(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2 \right) \psi(x^\mu_\mu)$$

$$= \underbrace{\frac{\phi_0''(t)}{c^2 \phi_0(t)}}_{= -\left(\underbrace{\frac{\omega(\vec{k})}{c}}_{=k_0}\right)^2} - \underbrace{\frac{\phi_1''(x_1)}{\phi_1(x_1)}}_{= -k_1^2} - \underbrace{\frac{\phi_2''(x_2)}{\phi_2(x_2)}}_{= -k_2^2} - \underbrace{\frac{\phi_3''(x_3)}{\phi_3(x_3)}}_{= -k_3^2} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$$

Exponentialansatz $\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \omega(\vec{k}) = \pm c \sqrt{\vec{k}^2 + (mc/\hbar)^2} \quad \Rightarrow \quad k^\mu = \begin{pmatrix} \omega(\vec{k})/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \psi_k = c\, e^{ik^\mu x_\mu}$$

Mit De-Broglie folgt: $E = \hbar\omega = \pm c \sqrt{(\hbar \vec{k})^2 + (mc)^2}$

und insbesondere $E = -c\sqrt{(\hbar\vec{k})^2 + m^2c^2}$

$\rightarrow$ Die Energie ist nicht nach unten beschränkt, ein wechselwirkendes Teilchen kann also unendlich viel Energie abgeben (und dabei in immer tiefere Energieniveaus fallen)

Eine allgemeine Lsg. der Klein-Gordon-Glg lässt sich mit

$$\psi(x^\mu) = \int \left(a(\vec{k})\, e^{ik_\mu x^\mu} + b^*(\vec{k})\, e^{-ik_\mu x^\mu} \right) \frac{d^3 \vec{k}}{2E\omega(\vec{k})(2\pi)^3}$$

finden, da aufgrund der ~~Quadrat~~ zweiten Ableitungen ∂_t^2, ∇^2 zu jedem $\phi_k \propto e^{ik_\mu x^\mu}$ auch $\phi_k^* \propto e^{-ik_\mu x^\mu}$ die Klein-Gordon-Glg löst.

- **Negative Dichte** (viel schlimmer!):

Suche Kontinuitätsglg. der Form $\partial_\mu j^\mu = 0$

$$0 = \psi^* \underbrace{D_\mu D^\mu \psi}_{= -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi} - \psi \underbrace{(D_\mu D^\mu \psi)^*}_{= -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*}$$

$$= \psi^* \partial_\mu D^\mu \psi - \psi\, \partial_\mu (D^\mu \psi)^* + \underbrace{\frac{iq}{\hbar c}\left(\psi^* A_\mu D^\mu \psi + \psi A_\mu (D^\mu \psi)^* \right)}_{= \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi + \psi \partial^\mu \psi^* + \underbrace{\psi^* \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \psi - \psi \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \psi^*}_{=0} \right)}$$

$$\psi^* \partial_\mu D^\mu \psi = \partial_\mu (\psi^* D^\mu \psi) - \underbrace{(\partial_\mu \psi^*)(D^\mu_\mu \psi)}_{= (\partial_\mu \psi^*)(\partial^\mu \psi) + \frac{iq}{\hbar c}(\partial_\mu \psi^*)(A^\mu \psi)}$$

$$\psi\, \partial_\mu (D^\mu \psi)^* = \partial_\mu \psi (D^\mu \psi)^* - \underbrace{(\partial_\mu \psi)(D^\mu \psi)^*}_{= (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu_\mu \psi^*) - \frac{iq}{\hbar c}(\partial_\mu \psi)(A^\mu \psi^*)}$$

$$= \partial_\mu \left(\psi^* D^\mu_\mu \psi - \psi (D^\mu \psi)^* \right) - (\partial_\mu \psi^*)(\partial^\mu \psi) + (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi^*)$$

$$0 = \partial_\mu \left(\psi^* D^\mu \psi - \psi (D^\mu \psi)^* \right) \quad + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi + \psi \partial^\mu \psi^* - \psi \partial^\mu \psi^* - \psi^* \partial^\mu \psi \right)$$

Siehe auch:
- Klein-Gordon-Glg
- Dirac-Glg
- Wahrscheinlichkeitsstrom / Kontinuitätsgleichung

$$\Rightarrow \quad j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* D^\mu \psi - \psi (D^\mu \psi)^*\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right) - \frac{q}{mc} A^\mu \psi^* \psi$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{2mc}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \frac{q}{mc}\Phi \psi^*\psi \\ \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi\right) - \frac{q}{mc}\vec{A}\psi^*\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Hier sieht man, dass der Term, der in der Schrödinger theorie der Wsk-dichte entspräche nicht positiv definit ist, was jegliche Wahrscheinlichkeits-interpretation scheitern lässt!

- Die Klein-Gordon-Glg. kann keine Teilchen mit Spin beschreiben

- 2. Zeitableitung: um Zstd zu bestimmen sind 2 Anfangsbedingungen $\psi(t_0)$, $\partial_t \psi(t)|_{t_0}$ nötig.
  ↯ ψ soll Zstd vollständig definieren