Dimensionslose Größen:

Um DGL „sorgenfrei" zu lösen, ist es sinnvoll, die Variablen so zu substituieren, dass DGL dimensionslos wird

→ nur noch Ableitungen nach dim. lose Größen, Multiplikation etc. mit dim. losen Größen.

Es macht Sinn, diese Größen so zu wählen, dass mit „einfachen Zahlen" als dimensionslose Größe gerechnet werden kann

→ ξ – dimensionslos mit $\mathcal{O}(\xi) = 1$

Dazu muss i.d.R. $\mathcal{O}(E_{pot}) = \mathcal{O}(E_{kin})$ gelten

Bsp.:
- Harmonischer Oszillator:

$$H = +\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

→ Für naivsten Ansatz ($m \to 0$, freies Teilchen)

$$\psi \propto e^{ikx}, \quad k = 2\pi/\lambda \sim 1/\lambda \Rightarrow \partial_x^2 \sim 1/\lambda^2$$

folgt $\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 = \varepsilon \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$\Rightarrow x = \lambda \xi \Leftrightarrow \xi = \frac{x}{\lambda}, \quad \partial_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}\partial_\xi = \frac{1}{\lambda}\partial_\xi$$

$$\rightarrow H = -\frac{\hbar^2/2m}{\lambda^2}\partial_\xi^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 \xi^2 = -\varepsilon\, \partial_\xi^2 + \varepsilon\, \xi^2$$

$$\rightarrow E/\varepsilon = -\partial_\xi^2 + \xi^2$$

- Wasserstoffatom

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right) - \frac{A}{r}, \quad A = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

EF $\vec{L}^2$ in Produktansatz $\psi = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, setze $u(r) = r R(r)$

$$\left[-\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{A}{r} + E\right)\right] u(r) = 0$$

→ im Wesentlichen
- $\partial_r^2 \sim \frac{1}{a_0^2}$ (kinetische Energie)
- $\frac{2m}{\hbar^2}\frac{A}{a_0}$ (potentielle Energie)

kin = pot $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{a_0} = \frac{2mA}{\hbar^2}$ (Längenskala)

= const. Parameter um Energie und Ag... zu ...

$\frac{\hbar^2}{2m a_0^2} = R_0$ (Energieskala)

$$\Rightarrow r = \frac{n}{2} x\, a_0, \quad \partial_r = \frac{2}{n a_0}\partial_x$$

$$\Rightarrow \left[-\partial_x^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} - \left(\frac{n a_0}{2}\right)^2 \left\{\frac{4}{n x a_0^2} - \frac{n^2}{4}\frac{E}{R_0}\right\}\right] u(x) = 0 \quad \Rightarrow \text{Def } E = -\frac{1}{n^2} R_0$$

$$\Rightarrow \left[-\partial_x^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - \frac{n}{2x} + \frac{1}{4}\right] u(x) = 0$$