Wellenpakete:

Die Lösungen des Hamiltonians eines freien Teilchens sind ebene Wellen

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \text{mit} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 u_k(x) = +\frac{\hbar^2}{2m}k^2 u_k(x) = E_k u_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Da ~~weil~~ $1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_k^* u_k \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx$ keine Lösung besitzt,

sind diese Wellenfunktionen jedoch nicht normierbar

Da jedoch das Superpositionsprinzip gilt, lassen sich normierbare WFen ~~darstellen~~ finden.

$$\cancel{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\, u_k(x)\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\, e^{ikx}\, dk = \tilde{g}(x)}$$

~~Aber~~ Da zu jedem k möglicherweise eine andere Energie E_k zugeordnet ist, muss

die Zeitentwicklung bei der Superposition schon berücksichtigt werden:

$$u_k(x,t) = u_k(x)\, e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t} = u_k(x)\, e^{-i\frac{\hbar}{2m}k^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\, u_k(x,t)\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\, e^{i\left(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right)}\, dk$$

$g(k)$ kann dabei eine beliebige komplexwertige Funktion sein. ~~[illegible]~~

$$g(k) = |g(k)|\, e^{i\varphi(k)}$$

Die Phase des Integrals ist dann also $\varphi(k) + kx - \frac{\hbar}{2m}t\, k^2 \equiv \Phi(k)$

Damit $u(x,t)$ normierbar ist, sollte u im Wesentlichen überall verschwinden, insbesondere bei $x \to \pm\infty$.
Das Integral über eine komplexe e-Funktion ist im Wesentlichen null und nur dort wo die Phase dieser e-Fkt. nahezu konstant ist ~~[illegible]~~ $\neq 0$.

$$\Rightarrow \Phi(k) = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{d\Phi}{dk}\right|_{k_0} = 0$$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} \left.\frac{d\varphi}{dk}\right|_{k_0} - \frac{\hbar}{m}tk_0 + x$$

Allgemeiner:
$$0 \overset{!}{=} \left.\frac{d\varphi}{dk}\right|_{k_0} - \frac{t}{\hbar}\left.\frac{dE_k}{dk}\right|_{k_0} + x \equiv x - (x_0 + v_0 t)$$

$$\text{mit} \quad x_0 = -\left.\frac{d\varphi}{dk}\right|_{k_0}, \quad v_0 = \frac{1}{\hbar}\left.\frac{dE_k}{dk}\right|_{k_0} \overset{E=\hbar\omega}{=} \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$$

Hierbei ist v_0 die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets und k_0 der Wellenvektor, bzw. $\hbar k_0$ der Impuls des Wellenpakets.

Für lange Zeiten zerfließt das Wellenpaket.

(Würde es das nicht tun, so müsste $|u(x,t)|^2 = |u(x-x_0,0)|^2$ gelten

$$\cancel{\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)||g(k')|\, e^{i(k-k')x} (}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)||g(k')|\, e^{i(k-k')x}\left(e^{-i(E_k - E_{k'})t/\hbar} - e^{-i(k-k')x_0}\right) dk'\, dk \qquad k' = k+p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)||g(k+p)|\, e^{-ipx}\left(e^{-i(E_k - E_{k+p})t/\hbar} - e^{+ipx_0}\right) dk\, dp \Rightarrow \frac{E_{k+p} - E_k}{\hbar}t \overset{!}{=} px_0$$