Die Klein-Gordon-Gleichung

Annahmen: • Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung mit Skalar- & Vektorpotential gilt:

$$E = \sqrt{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -(E - q\phi)^2/c^2 + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2 c^2$$

• Die nichtrelativistischen Operatoren sind weiterhin anwendbar:

$$\rightarrow \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla \,;\; \hat{\vec{p}}\psi = \vec{p}\psi \quad \rightarrow \vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla$$

$$\rightarrow E\psi = H\psi = i\hbar\partial_t\psi \quad \rightarrow E \rightarrow i\hbar\partial_t$$

Einsetzen liefert:

$$0 = \left[-\left(i\hbar/c\,\partial_t - q/c\,\phi\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^2\right]\psi$$

$$= \hbar^2\left(\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{iq}{\hbar c}\phi\right)^2 - \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)^2\right) + m^2c^2 \quad \psi$$

$$= \left[\hbar^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t/c + \frac{iq}{\hbar c}\phi \\ \nabla + \frac{iq}{\hbar c}(-\vec{A}) \end{pmatrix}}_{= \hat{\partial}_\mu + \frac{iq}{\hbar c}\hat{A}_\mu \equiv \hat{D}_\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t/c + \frac{iq}{\hbar c}\phi \\ -\nabla + \frac{iq}{\hbar c}\vec{A} \end{pmatrix}}_{= \hat{\partial}^\mu + \frac{iq}{\hbar c}\hat{A}^\mu = \hat{D}^\mu} + m^2c^2\right]\psi \quad \text{(Kovariante Ableitung)}$$

$$= \left(\hbar^2 \hat{D}_\mu \hat{D}^\mu + m^2c^2\right)\psi$$

$$= \left[-\underbrace{\begin{pmatrix} i\hbar\partial_t/c - \frac{q}{c}\phi \\ -\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}(-\vec{A}) \end{pmatrix}}_{= \hat{p}_\mu - \frac{q}{c}\hat{A}_\mu \equiv \hat{\pi}_\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} i\hbar\partial_t/c - \frac{q}{c}\phi \\ \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} \end{pmatrix}}_{= \hat{p}^\mu - \frac{q}{c}\hat{A}^\mu = \hat{\pi}^\mu} + m^2c^2\right]\psi \quad \text{(Kanonischer Impuls / minimale Kopplung)}$$

$$= \left(-\hat{\pi}_\mu \hat{\pi}^\mu + m^2c^2\right)\psi$$

Siehe auch
• Kovariante Ableitung (Relativistik)
• Minimale Kopplung