Entropie

Die Entropie ist informationstheoretisch definiert als $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ mit Wkt. p_i

Sie ist somit ein Maß für die Unsicherheit:

- bei $p_j = 1$, $p_i = 0 \; \forall i \neq j$ folgt $\ln p_j = 0$, und somit $S = 0$
- für $p_i < 1 \; \forall i$ folgt $p_i \ln p_i < 0$, da ln zwischen 0 und 1 stärker als linear fällt und negativ ist, p jedoch positiv
  $\Rightarrow$ ~~p_i~~ $S > 0$

  Da also der ln für kleinere p_i immer stärker dominiert und immer kleiner (bzw. betragsmäßig immer größer wird), ist S je größer, desto kleiner p_i

- Für Systeme mit N Zuständen ist die Unsicherheit, ~~[illegible]~~ in welchem Zustand diese sich befinden umso größer, desto niedriger die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Zustands p_i ist.
- Die Entropie ist für gleichverteilte Zufallsgrößen maximal

$\Rightarrow$ Entropie Maß für Unsicherheiten ~~[illegible]~~

Physikalisch:

Man kann nur Makrozustände ($\hat{=}$ Zustände, die durch ~~[illegible]~~ makroskopische (also messbare) Größen definiert sind) messen. Ein Makrozustand kann jedoch durch mehrere Mikrozustände ~~[illegible]~~ ($\hat{=}$ Zustand, bei dem für jedes Teilchen alle gegebenen Größen genau festgelegt / bekannt sind), ~~beschrieben werden Insbesondere gilt dies für~~ entspricht einem Punkt im Phasenraum beschrieben werden. Insbesondere gilt dies für ~~Teil~~ Systeme, die aus ununterscheidbaren Teilchen bestehen.

In einem Makrozustand können die Mikrozustände ständig ineinander übergehen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Makrozustandes ist durch die Anzahl von Mikrozuständen gegeben, durch die dieser realisiert werden kann.
Je mehr Mikrozustände in einem Makrozustand enthalten sind, desto weniger lässt sich durch Messung des Makrozustandes auf den aktuell vorliegenden Mikrozustand schließen.

$\Rightarrow$ Die Unsicherheit, in welchem Mikrozustand sich ein System bei gegebenem Makrozustand befindet ist also größer, je wahrscheinlicher dieser Makrozustand ist. Also ist für wahrscheinlichere Makrozustände ~~die~~ eine Entropie größer.

$\Rightarrow$ Wenn System seinen Makrozustand ~~sich [illegible]~~ ändern ~~kann~~, wird es in den wahrscheinlichsten Makrozstd. übergehen. Dieser wird thermisches Gleichgewicht genannt und besitzt die maximale Entropie

Die Entropie muss also in der Physik die Wahrscheinlichkeit eines speziellen Mikrozustandes bei gegebenem Makrozustand beschreiben.
Ein realisierbarer Mikrozustand ist ein Eigenzustand des Hamiltonians des Gesamtsystems.

$\rightarrow$ Dichteoperator geeigneter Kandidat für p:
Für die Einheit: k_B

$$\rightarrow \quad S = -k_B \, \mathrm{Tr} \, \underbrace{\rho \ln \rho}_{\hat{=} \, \rho \sum_i \langle \psi_i | \cdot | \psi_i \rangle}$$

$$\rightarrow \quad \text{wenn } \rho \text{ diagonal}: \quad S = -k_B \sum_n \underbrace{w_n}_{\text{Wkt. des } n\text{-ten Mikrozstds.}} \ln w_n$$

Extensiv: zwei Systeme A, B, nicht verschränkt $\Rightarrow$ Produktzustd. $|\psi\rangle = |A\rangle|B\rangle$, $w_n = w_n^A w_n^B$

$$S = -k_B \sum_{n,m} w_n^A w_m^B \ln w_n^A w_m^B = -k_B \sum_{n,m} w_n^A w_m^B \left(\ln w_n^A + \ln w_m^B\right) \underbrace{=}_{\sum_n w_n = 1} -k_B \sum_n w_n^A \ln w_n^A - k_B \sum_m w_m^B \ln w_m^B$$

$$= S^A + S^B$$