Landauniveaus (Eichabhängig, Landaueichung)

Annahmen:
- $\vec{A} \neq 0$, so dass $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = B\vec{e}_z$

  Wähle Landaueichung: $\vec{A} = -By\,\vec{e}_x$
- $\phi = 0$
- Ohne Spin (mit Spin: siehe algebraische Lsg.)

$$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{2m}\left(p_x + qBy\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 + p_z^2\right)$$

↑ Rechnung in SI Einheiten, für cgs $q \to \frac{q}{c}$

Feststellung:
- p_z interagiert gar nicht mit p_x, p_y, y

  $\Rightarrow$ in z-Richtung freies Teilchen (also ebene Welle)
- $H \neq H(x) \quad \Rightarrow \quad [p_x, H] = 0$

  $\Rightarrow$ H und p_x könnten gemeinsame Eigenzustände besitzen

  $\Rightarrow$ Ansatz: $\psi = A_x e^{ik_x x}\,\psi(y)\,A_z e^{ik_z z}$

  ↑ Wird nicht mehr betrachtet, da Lösung bekannt und kein Einfluss auf x, y

  $A_z = \frac{1}{\sqrt{L_z}}, \; k_z = \frac{2\pi}{L_z} \cdot n_z$

Lösung: z-Abhängigkeit ignorieren und x-Ansatz einsetzen liefert:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\hbar k_x + qBy\right)^2 + \frac{1}{2m}p_y^2$$

$$= \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{m}{2}\underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{\equiv \omega_c^2}\Big(\underbrace{\frac{\hbar k_x}{qB}}_{\equiv -y_0} + y\Big)^2$$

$$= \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{m}{2}\omega_c^2 (y - y_0)^2$$

y_0: Verschiebung der Ruhelage des Oszillators

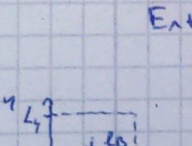
$\Rightarrow$ So entspricht der Hamiltonian genau einem harmonischen Oszillator in y-Richtung, dessen Ruhelage um y_0 verschoben ist.
(Die Verschiebung sollte jedoch nichts an der Energie ändern)

$\Rightarrow$ Amplitude eines harm. Osz. ggf. durch $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \Rightarrow l_B = \sqrt{\frac{\hbar m}{m qB}} = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$
≙ Breite der Schwingung

$$\Rightarrow \quad E_{x,y} = \hbar\omega_c\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$$

↑ da Lösung der WF für x in Bestimmung mit eingeflossen!

$$E = \hbar\omega_c\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$



Entartung:
- Die Energie hängt nicht von der Verschiebung der Ruhelage ab!

  $\rightarrow$ diese ist proportional zu k_x

  $\Rightarrow$ Für ein festes y bzw. n_y gibt es unendlich viele (bzw. N_{k_x}) Zustände mit unterschiedlichen k_x aber derselben Energie
- Betrachte Endliches Volumen L_x, L_y, dann

  $k_x = \frac{2\pi}{L_x} \cdot n_x$

  $\rightarrow$ da $y_0 = -\frac{\hbar k_x}{qB}$ sollte $k_x \leq 0$ gelten

  da $y_0 \leq L_y$ sollte $k_x \geq \frac{qB}{\hbar} L_y = l_B^{-2} \cdot L_y$ gelten

  $\Bigg\} \Rightarrow 0 \leq n_x \leq \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{L_x L_y B}{2\pi\hbar/q} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$

  Entartungsgrad

Entartungsgrad $\quad g_x = \dfrac{L_x L_y B}{2\pi\hbar/q}$

$L_x L_y B$ } magnetischer Fluss durch Fläche, in der sich Teilchen aufhält

$2\pi\hbar/q$ } muss auch mag. Fluss sein, ausgedrückt (fast) nur durch elementare Größen
[üblicherweise: Betrachte Elektron → $q = e$]
⇒ kleinstes Quantum des mag. Flusses Φ_0

$$= \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Erinnerung: · Ohne B-Feld war Quantisierung nur durch Randbed. gegeben
→ (fast) kontinuierliches Spektrum

· Nun Abstand der Energiezustände $\hbar\omega_c$