

# Dichtematrizen von Teilsystemen

Betrachte Hilbertraum, der in zwei sub-Hilberträume aufgeteilt werden kann:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Der <sup>reine</sup> Zustand  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  muss sich <sup>genähtes Vektor</sup> also als <sup>Produkt</sup> zweier Zustände

$|n\rangle_A \in \mathcal{H}_A$  und  $|m\rangle_B \in \mathcal{H}_B$  darstellen lassen mit den Gewichten  $c_{nm}$

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n\rangle_A |m\rangle_B$$

Für Operatoren  $O$ , die nur in einem <sup>Teil</sup> Subsystem (hier bspw.  $A$ ) wirken gilt:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \sum_{n,m,n',m'} c_{nm}^* c_{n'm'} \langle m|_B \langle n|_A O |n'\rangle_A |m'\rangle_B \\ &= \sum_{n,m,n',m'} c_{nm}^* c_{n'm'} \underbrace{\langle m|m'\rangle_B}_{=\delta_{mm'}} \langle n|_A O |n'\rangle_A \\ &= \sum_{n,n'} \underbrace{\sum_m c_{nm}^* c_{n'm}}_{=S_A^{nn'}} \langle n|_A O |n'\rangle_A = \sum_{n,n'} \langle n|_A S_A^{\dagger} O |n'\rangle_A \\ &= \text{tr}_A(S_A^{\dagger} O) \end{aligned}$$

$\hat{=}$   $S_A^{\dagger}$  ist Vorzeichen, da in Operator  $S_A^{\dagger}$  der Ket Vektor von  $n$  steht!

Somit hat man die effektive Dichtematrix  $S_A^{\dagger}$  gefunden.

Bereits durch Betrachtung eines reinen Zustands, der aus mehreren Zuständen in mehreren sub-Hilberträumen zusammengesetzt ist, ergibt sich die Notwendigkeit der Konstruktion einer Dichtematrix.

Die Dichtematrix von <sup>Teil</sup> Subsystem  $A$  kann auch geschrieben werden als die <sup>in B</sup> Spur des ~~reinen Zustands~~  $B$  Projektionsoperators auf den reinen Zstd.  $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} S_A^{\dagger} &= \sum_m \langle m| P_A |m\rangle = \sum_m \langle m|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle = \sum_m \langle m| \sum_{n,n',m',m''} c_{nm}^* c_{n'm'} |n\rangle_A |m\rangle_B \langle m'|_B \langle n'|_A |m\rangle \\ &= \sum_{n,n'} \sum_m \sum_{m'} \underbrace{\langle m|m'\rangle_B}_{=\delta_{mm'}} \underbrace{\langle n'|_A |n\rangle_A}_{=\delta_{nn'}} c_{nm}^* c_{n'm'} \\ &= \sum_{n,n'} c_{nm}^* c_{n'm'} |n\rangle_A \langle n'|_A \end{aligned}$$