Fermigas (ideal)

$$Z_\lambda = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)}\,, \qquad \Omega = -\overbrace{k_B T}^{=\frac{1}{\beta}} \sum_\lambda \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}\right), \qquad N = \sum_\lambda \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}+1} = \sum_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda)$$

Entropie:

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}\Big|_{V,\mu} = \underbrace{-\frac{\partial \beta}{\partial T}}_{=k_B\beta^2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\Big|_{V,\mu} = k_B \beta^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\Big|_{V,\mu}$$

$$= \dots = -k_B \sum_\lambda \Big(\underbrace{n_F(\varepsilon_\lambda) \ln n_F(\varepsilon_\lambda)}_{\text{Entropie des besetzten Zustands}} + \underbrace{(1-n_F(\varepsilon_\lambda)) \ln(1-n_F(\varepsilon_\lambda))}_{\text{Entropie des unbesetzten Zustands}} \Big)$$

Druck: $p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V}\Big|_{T,\mu} = -\frac{\Omega}{V}$

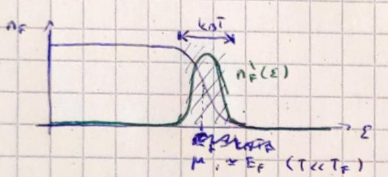
Fermienergie: $T = 0$: $\quad n_F(\varepsilon_\lambda) = \Theta(-\varepsilon_\lambda + \mu)$

da $n_F(\varepsilon_\lambda) \hat{=}$ Mittlere Besetzungszahl des Zustands λ gilt:
alle Zustände mit $\varepsilon_\lambda < \mu$ sind besetzt, alle anderen unbesetzt!

→ Zustand mit der höchsten Energie:

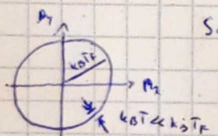
$$N = \sum_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda) \underset{\text{Energie- u. Spinentartung}}{\longrightarrow} (2s+1) \int \mathcal{V}(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon)\, d\varepsilon = (2s+1) \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_F = \mu(T=0)} \mathcal{V}(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Bsp $\mathcal{V}(\varepsilon) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\sqrt{\varepsilon}\, V$: $\quad N = (2s+1) V \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon}^3 \Big|_0^{\varepsilon_F} \iff \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2 n}{2s+1}\right)^{\frac{2}{3}}$



Im schraffierten Bereich können im Fermigas Übergänge von Besetzungszuständen stattfinden, d.h. es ist dort nicht klar definiert, welcher Zustand besetzt ist und welcher nicht.
→ Dieser Bereich ist interessant für Leitung in Metallen

Sommerfeld entwicklung:



Betrachte Metalle: $E_F = 10\,eV \sim k_B \cdot 10^5\,K \Rightarrow$ Bei erreichbaren Temperaturen ist $k_BT \ll T_F$, weshalb im Phasenraum die Elektronen im wesentlichen innerhalb einer Fermikugel mit schmalem Rand sind.

$$\Omega = -k_BT \sum_\lambda \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}\right) = -(2s+1)V \underbrace{k_BT \int_{\varepsilon_{min}}^\infty \mathcal{V}(\varepsilon) \ln\left[1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right] d\varepsilon}_{\equiv I}$$

$\mathcal{V}_n(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon - \varepsilon_{min})\mathcal{V}(\varepsilon)$

$a(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\varepsilon} \mathcal{V}_n(\varepsilon')\,d\varepsilon'$

$$I = k_BT\, a(\varepsilon) \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right)\Big|_{-\infty \to 0,\, a(\varepsilon)}^{\infty \to 0,\, \ln(1)} + \int_{-\infty}^\infty a(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$b(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\varepsilon} a(\varepsilon')\,d\varepsilon'$

$$= +b(\varepsilon)\, n_F(\varepsilon)\Big|_{-\infty \to 0,\, b}^{\infty \to 0,\, n_F} - \int_{-\infty}^\infty b(\varepsilon) \cdot n_F'(\varepsilon)\, d\varepsilon \,, \qquad + n_F'(\varepsilon) = -\frac{\beta e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1\right)^2} = \frac{-\beta/4}{\cosh^2(\beta(\varepsilon-\mu))}$$

$$\simeq \frac{\beta}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{b(\mu) + a(\mu)(\varepsilon-\mu) + \frac{1}{2}\mathcal{V}(\mu)(\varepsilon-\mu)^2}{\cosh^2(\beta(\varepsilon-\mu))}\, d\varepsilon \qquad b(\varepsilon) \simeq b(\mu) + a(\mu)(\varepsilon-\mu) + \frac{1}{2}\mathcal{V}(\mu)(\varepsilon-\mu)^2$$

Integral ungerade Fkt über gerades Intervall $= 0$

$$= b(\mu)\left[n_F(\varepsilon)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\beta}{4} a(\mu) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh^2 \beta x}\,dx + \frac{1}{\beta^2}\mathcal{V}(\mu) \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{\cosh^2 x}\,dx}_{=\frac{\pi^2}{6}}$$

$$= b(\mu) + \frac{\pi^2}{6}\frac{\mathcal{V}(\mu)}{\beta^2}$$

$$\Omega = -(2s+1)V\left[b(\mu) + \frac{\pi^2}{6}\frac{\mathcal{V}(\mu)}{\beta^2}\right]$$

$$n = \frac{-1}{V}\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\Big|_{V,T} = (2s+1)\left[a(\mu) + \frac{\pi^2}{6\beta^2}\mathcal{V}'(\mu)\right]$$

Wechsel in kanonische Logik: n – fixiert $\Rightarrow a(\mu) = \frac{n(T)}{2s+1} - \frac{\pi^2}{6\beta^2}\mathcal{V}'(\mu) \overset{\text{beliebige Temp., auch } T=0}{=} \frac{n(T=0,\mu)}{2s+1}$

Beispiel $\mathcal{V}(\varepsilon) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{V}'(\mu) = \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2}\frac{1}{\pi^2\hbar^3}\frac{1}{\sqrt{\mu}}$

$$n(T,\mu) = n(T=0,\mu) + \frac{\pi^2}{6\beta^2}(2s+1)\left(\frac{m}{2}\right)^{3/2}\frac{1}{\pi^2\hbar^3}\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

außerdem $n(T,\mu) = n(T=0, E_F) = \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{2s+1}{6\pi^2}$, $\quad n(T=0,\mu) = \frac{2s+1}{6\pi^2}\left(\frac{2m\mu}{\hbar^2}\right)^{3/2}$

$$\Rightarrow E_F^{3/2} = \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{8\sqrt{\mu}}\cdot\frac{1}{\beta^2}$$

Für $\mu \simeq E_F$ folgt: $\mu^{3/2}$ dominiert $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ $\Rightarrow \mu \simeq E_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{E_F}\right)^2\right]$