Fermis Goldene Regel:

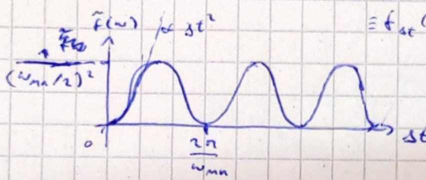
Ziel: Bestimmung der Übergangsrate $\Gamma_{m\leftarrow n} = \frac{P_{m\leftarrow n}}{\Delta t}$ vom n-ten ungestörten Zustand in den m-ten ungestörten Zustand, wenn im Zeitintervall Δt eine in diesem Zeitintervall als konstant zu betrachtende Störung V vorliegt.

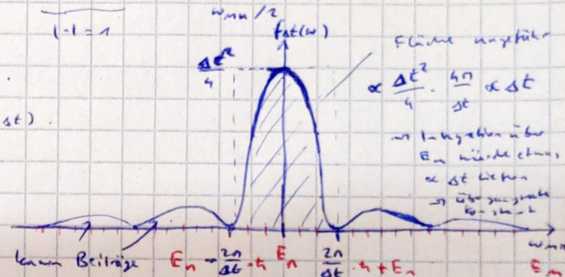
Überlegung: Wenn Störung klein und zeitlich konstant genügt (hoffentlich) 1. Ordg. ST:
$$P_{m\leftarrow n} \simeq \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{\Delta t} \langle m|\underset{\text{WW-Bild}}{V_I(t)}|n\rangle\right|^2$$

Matrixelement:
$$\langle m|V_I(t)|n\rangle = \langle m|e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\, V\, \underbrace{e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}|n\rangle}_{=|n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}} \qquad \langle m|e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} = \left(e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}|m\rangle\right)^+ = \left(e^{-i\frac{E_m t}{\hbar}}|m\rangle\right)^+ = e^{i\frac{E_m t}{\hbar}}\langle m|$$
$$= V_{mn}\, e^{-i\frac{E_n - E_m}{\hbar}t}$$

Integral:
$$\int_{\Delta t}\langle m|V_I(t)|n\rangle\, dt = V_{mn}\int_{\Delta t} e^{-i\frac{E_n-E_m}{\hbar}t}\,dt = V_{mn}\frac{i\hbar}{E_n-E_m}\left(e^{-i\frac{E_n-E_m}{\hbar}\Delta t}-1\right)$$
$$= V_{mn}\frac{2\hbar}{E_n-E_m}\, e^{-i\frac{E_n-E_m}{2\hbar}\Delta t}\left(\frac{e^{+i\frac{E_n-E_m}{\hbar}\frac{\Delta t}{2}} - e^{-i\overbrace{\frac{E_n-E_m}{\hbar}}^{\omega_{mn}}\frac{\Delta t}{2}}}{2i}\right)$$
$$= V_{mn}\,\underbrace{e^{-i\frac{E_n-E_m}{2\hbar}\Delta t}}_{|\cdot| = 1}\;\frac{\sin\frac{\omega_{mn}}{2}\Delta t}{\omega_{mn}/2}$$

$$\Rightarrow P_{m\leftarrow n} \simeq \frac{1}{\hbar^2}|V_{mn}|^2\,\underbrace{\frac{\sin^2\frac{\omega_{mn}}{2}\Delta t}{(\omega_{mn}/2)^2}}_{\equiv f_{\Delta t}(\omega) = \tilde{f}_\omega(\Delta t)}$$





Fläche ungefähr $\propto \frac{\Delta t^2}{4}\cdot\frac{4\pi}{\Delta t} \propto \Delta t$

→ Integration über E_m würde etwas $\propto \Delta t$ liefern
→ Übergangsrate konstant

→ für zu kleine Δt ist $\tilde{f}_\omega(\Delta t) \propto \Delta t^2$
↯ um konstante Rate zu erhalten sollte $\tilde{f}_\omega(\Delta t) \propto \Delta t$ sein

→ je größer Δt, desto kleiner kann ω_{mn} sein, damit in einem Integral über m die meisten Übergänge (bzw. die am wenigsten unterdrückten Übergänge) berücksichtigt

→ Störung liefert nicht genügend Energie, um in Zustand mit (sehr) unterschiedlicher Energie zu wechseln

Mathematisch:

- $$\lim_{a\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\pi x} = \delta(x)$$ → in unserem Fall $a \propto \frac{1}{\Delta t}$ → $\frac{\omega_{mn}}{2}\Delta t \gg 1$
→ $\delta(x)$ macht nur im Integral Sinn!!!

- $$\pi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 \vartheta}{\vartheta^2}\,d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}\Delta t}{(\frac{\omega}{2}\Delta t)^2}\cdot\frac{\Delta t}{2}\,d\omega = \frac{1}{2\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}\Delta t}{(\omega/2)^2}\,d\omega$$
$$\simeq \frac{1}{2\Delta t\,\hbar}\int_{E_n-\frac{2\pi}{\Delta t}\hbar}^{E_n+\frac{2\pi}{\Delta t}\hbar}\frac{\sin^2\frac{E_m-E_n}{2\hbar}\Delta t}{\left(\frac{E_m-E_n}{2\hbar}\right)^2}\,dE_m$$
$$\Leftrightarrow \int_{E_n-\frac{2\pi}{\Delta t}\hbar}^{E_n+\frac{2\pi}{\Delta t}\hbar}\frac{\sin^2\frac{E_m-E_n}{2\hbar}\Delta t}{\left(\frac{E_m-E_n}{2\hbar}\right)^2}\,\frac{dE_m}{\hbar} \simeq 2\pi\Delta t$$

$$\Rightarrow f_{\Delta t}(\omega_{mn}) \simeq 2\pi\Delta t\cdot\delta(E_m-E_n)$$
↑ Zustandsdichte bei dichtem Spektrum

Für ausreichend große Zeiten Δt gilt für Übergänge mit ähnlichen Energien:
$$P_{m\leftarrow n} \simeq \frac{2\pi}{\hbar^2}|V_{mn}|^2\,\delta(E_m-E_n)\,\Delta t < 1$$ ⇒ Δt darf auch nicht zu groß sein!!!

↑ Bedeutung: Störung begünstigt zwar einen Übergang, bringt jedoch keine Energie dafür auf
→ Übergänge nur zu Zuständen ähnlicher Energie möglich

$$\rightarrow \Gamma_{m\leftarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar^2}|V_{mn}|^2\,\delta(E_m-E_n)$$

Wahrscheinlichkeit, den Ausgangszustand zu verlassen

$$P_{\leftarrow n} = \sum_m P_{m\leftarrow n} \simeq \int P_{m\leftarrow n}\, dm = \int P_{m\leftarrow n} \underbrace{\frac{dm}{dE}}_{\varrho(E),\ \text{Energiedichte}} \cdot dE$$

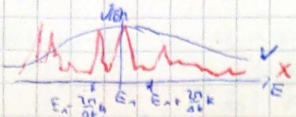
Übergang nur legitim, wenn sich Zustands-Dichte nicht zu schnell ändert!

$$= \int \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \Delta t\, \delta(E-E_n)\, \varrho(E)\, dE$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \varrho(E_n)\, \Delta t$$

← Energiedichte kommt ursprünglich aus δ-Dichte

⇒ δ ist Symbol für Energiedichte



$$\to \Gamma_{\leftarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \varrho(E_n)$$

Achtung: wenn V_{mn} auch noch von anderen Quantenzahlen als m abhängt, muss deiner Sobst. besser aufgepasst werden.

Dann wieder Formel von Vorderseite verwenden und substituieren