$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$

$J_\pm \equiv J_x \pm i J_y \Rightarrow J_\pm^+ = J_\mp$

$\rightarrow [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$

$\rightarrow [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$

$\left.\right\} \quad \vec{J}^2 = J_+ J_- - \hbar J_z + J_z^2 = J_- J_+ + \hbar J_z + J_z^2$

$\Rightarrow [\vec{J}^2, J_\pm] = 0$

Def Eigenfunktionen $|j,m\rangle$: $\vec{J}^2 |j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j,m\rangle$, $J_z |j,m\rangle = m\hbar |j,m\rangle$

$\vec{J}^2 J_\pm |j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) J_\pm |j,m\rangle \rightarrow J_\pm |j,m\rangle$ ist Eigenzustand $\vec{J}^2$

$J_z J_\pm |j,m\rangle = \hbar (m \pm 1) J_\pm |j,m\rangle \rightarrow J_\pm |j,m\rangle = c_\pm |j, m\pm 1\rangle$

$$|c_\pm|^2 = \langle j,m | J_\mp J_\pm | j,m\rangle = \langle j,m | (\vec{J}^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z) | j,m\rangle = \hbar^2 [j(j+1) - m(m\pm 1)]$$

Außerdem $\vec{J}$ hermitesch $\Rightarrow J_i = J_i^+$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle j,m | (J_x^2 + J_y^2) | j,m\rangle = \langle j,m | (\vec{J}^2 - J_z^2) | j,m\rangle = (j(j+1) - m^2)\hbar$$

Somit ist m für ges. j beschränkt $J_\pm |j, m_{max}\rangle \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow c_+ = 0$ bei m_{max}, also $j(j+1) = m_{max}(m_{max}+1)$

$c_- = 0$ bei m_{min}, also $j(j+1) = m_{min}(m_{min}-1)$

$$\Rightarrow 0 = m_{max}(m_{max}+1) + m_{min}(1 - m_{min}) = \underbrace{(m_{max}+m_{min})}_{\Rightarrow m_{min} = -m_{max}}\underbrace{(m_{max}-m_{min}+1)}_{m_{min} = m_{max}+1 > m_{max} \; ⚡}$$

Für $m_{min} = -m_{max}$ folgt $m_{max} = j$

Darauss folgt (da m_{min} und m_{max} eine ganze Zahl auseinanderliegen):

$$j, m \in \begin{cases} \mathbb{N}_0, \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} + \mathbb{N}_0, \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \text{Drehimpulse ganz } \underline{\text{oder}} \text{ halbzahlig}$$