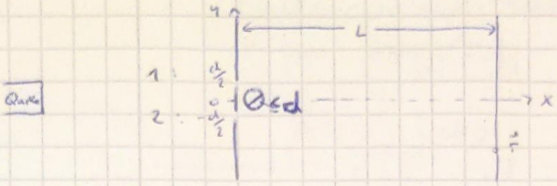
Aharonov-Bohm Effekt

Betrachte Doppelspalt mit lange Spule (Solenoid) zwischen den Spalten:

Die lange Spule sei so lang, dass das Magnetfeld außerhalb der Spule (also im Bereich der Spalte) verschwinde



Da das Magnetfeld außerhalb der Spule verschwindet, gilt

$\vec B = \operatorname{rot} \vec A$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \cdot = 0$ $\Rightarrow$ $\vec A = \nabla \chi(\vec r)$ ist mögliches Vektorpotential

(Aufgrund der Spule wird davon ausgegangen, dass $\vec A \neq 0$)

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec p - \frac{q}{c}(\nabla \chi)\right)^2 + V(\vec r)$$

Erinnerung: Eichfreiheit: für $\phi, \vec A$, ψ_0 kann Eichtransformation

$$\vec A \to \vec A + \nabla \chi = \vec A'$$
$$\psi_0 \to e^{\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\chi} \cdot \psi_0 = \psi'$$
$$\phi \to \phi + \frac{1}{c}\partial_t \chi = \phi' \quad \text{(hier irrelevant)}$$

durchgeführt werden, was den Hamiltonian nicht beeinflusst

$$\vec p\, \psi' = \vec p\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\chi}\psi_0 = \frac{q}{c}(\nabla\chi)\psi' + e^{\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\chi}\vec p\, \psi_0$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec p - \frac{q}{c}(\nabla\chi)\right)\psi' = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{q}{c}\chi}\vec p\, \psi_0 \quad \Rightarrow \left(\vec p - \frac{q}{c}(\nabla\chi)\right)^2\psi' = \left(\vec p - \frac{q}{c}(\nabla\chi)\right)e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\vec p\, \psi_0$$
$$= -\frac{q}{c}(\nabla\chi)e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\vec p\, \psi_0 + \frac{q}{c}(\nabla\chi)e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\vec p\, \psi_0 + e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\vec p^{\,2}\psi_0$$

$$\Rightarrow \Big[\underbrace{\left(\vec p - \frac{q}{c}(\nabla\chi)\right)^2 + V(\vec r)}_{=H'}\Big]\psi' = e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\Big[\underbrace{\vec p^{\,2} + V(\vec r)}_{=H_0}\Big]\psi_0 = e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}E\psi_0 = E\psi'$$

Die Lösung des Hamiltonians (i.e. die WF) unterscheidet sich nur durch komplexe Phase bei verschiedenen $\vec A = \nabla\chi$, also verschiedenen χ.

Wähle nun das Skalarfeld χ so, dass $\vec A = \nabla\chi$ gilt, also als Wegintegral über $\vec A$

$$\chi(\vec r) = \chi(\vec r_0) + \int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec A(\vec r\,')\, d\vec r\,'$$

Für Wellenfunktion ψ_1 die durch 1 und oberhalb des Solenoids vorbei geht und ψ_2 die durch 2 und unterhalb des Solenoids vorbeigeht und die beide am Punkt $\vec r$ ankommen gilt

$$\psi_{ges} = \underbrace{\psi_1(\vec r)}_{=\psi_1^{(0)}(\vec r)e^{i\chi_1\frac{q}{\hbar c}}} + \underbrace{\psi_2(\vec r)}_{=\psi_2^{(0)}(\vec r)e^{i\chi_2\frac{q}{\hbar c}}} \quad \to \quad s = |\psi_{ges}|^2 = \overset{|\psi_1|^2}{1} + \overset{|\psi_2|^2}{1} +$$

$$s = |\psi_{ges}|^2 \propto \underset{|\psi_2|^2}{1} + \underset{|\psi_1|^2}{1} + \psi_1^*\psi_2\, e^{-i(\chi_1-\chi_2)\frac{q}{\hbar c}} + \psi_1\psi_2^*\, e^{i(\chi_1-\chi_2)\frac{q}{\hbar c}} \propto 1 + \cos\left(\frac{q}{\hbar c}\Delta\chi\right)$$

Siehe auch Eichfreiheit

Was ist $\Delta\chi$?

$$\chi_1 = \int_{C_1} \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' + \chi(\vec{r}_0)$$

$$\chi_2 = \int_{C_2} \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' + \chi(\vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow \chi_1 - \chi_2 = \int_{C_1} \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' - \int_{C_2} \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

$$= \oint \vec{A}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{F_1} \underbrace{\nabla \times \vec{A}(\vec{r}\,')}_{=\vec{B}(\vec{r}\,')}\,d\vec{F}_1$$

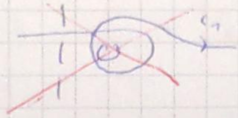
Flächenelement

$= 0$ außerhalb von A_s

$$= \int_{A_s} \vec{B}(\vec{r})\,d\vec{F} = \Phi_{mag,\,Solenoid}$$

$\Rightarrow \Delta\chi = \Phi_{mag,\,Solenoid}$, der magnetische Fluss durch den Solenoiden

Achtung: C_1, C_2 dürfen den Solenoiden nicht umrunden, da bei jeder Umrundung ein magnetischer Fluss aufgesammelt wird



$\Rightarrow$ Dann nicht mehr eindeutig

$\rightarrow$ Dies liegt daran, dass die Spule für die WF quasi „Tabu" ist, also der Raum nicht mehr einfach zusammenhängend

Effekt: Obwohl sich ein durch Ψ beschriebenes qm-Teilchen nie innerhalb der Spule aufhält und somit nie in Kontakt mit dem Magnetfeld kommt (da dieses auf Bereich innerhalb beschränkt ist),

„spürt" es den Effekt des Magnetfeldes, also den magnetischen Fluss innerhalb der Spule!