Zeit-Ordnungs Operator:

Idee: Da $V_1(t), V_1(\tilde{t})$ für $t \neq \tilde{t}$ nicht vertauschen muss die Ordnung der Integration ~~sowohl~~ und des Produkts $\prod_{m=1}^{n} V_1(t_m)$ beibehalten werden.

Def
$$T\left[O(t_1)O(t_2)\right] = \begin{cases} O(t_1)O(t_2) & t_2 \leq t_1 \\ O(t_2)O(t_1) & t_1 < t_2 \end{cases}$$

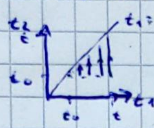
„die früheste Zeit steht immer ganz rechts und wirkt damit zuerst auf die WF"

Anwendung

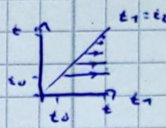
Betrachte nun Summand der 2. Ordnung der Dyson Reihe:

$$D_2 \equiv \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} V_1(t_1)V_1(t_2)\,dt_2\,dt_1 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} T\left[V_1(t_1)V_1(t_2)\right]dt_2\,dt_1$$

Das Integrationsvolumen sieht so aus:



Durchlaufe nun dasselbe Integrationsvolumen in „Horizontaler" Richtung:



$$D_2 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_2}^{t} V_1(t_1)V_1(t_2)\,dt_1\,dt_2$$

^ Es gilt noch immer, dass $t_2 < t_1$

Erkenne, dass Benennung random ist und tausche Namen von t_1, t_2

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_1}^{t} \underbrace{V_1(t_2)V_1(t_1)}_{= T\left[V_1(t_1)V_1(t_2)\right]}\,dt_2\,dt_1$$

Nach dem Tausch gilt $t_1 < t_2$ → Reihenfolge von V_1 passt

$$\Rightarrow D_2 = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} T\left[V_1(t_1)V_1(t_2)\right]dt_2\,dt_1 = \int_{t_0}^{t}\int_{t_1}^{t} T\left[V_1(t_1)V_1(t_2)\right]dt_2\,dt_1$$

$$\Rightarrow D_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} T\left[V_1(t_1)V_1(t_2)\right]dt_2\,dt_1$$

Für 3 dimensionales Integrationsvolumen $\int dt_2$ gleich wie 2D

$$\int_{t_0}^{t_2} dt_3 = \int_{t_2}^{t_1} dt_3 = \int_{t_1}^{t} dt_3$$

$$\Rightarrow D_3 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}_{=\frac{1}{3!}} \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} T\left[V_1(t_1)V_1(t_2)V_1(t_3)\right]dt_3\,dt_2\,dt_1$$

„Zeitgeordnetes Exponential" – Andere Notation → (aber auch nicht mehr als Notation!)

Für n dimensionales Integrationsvolumen:

$$U_1^{(n)}(t,t_0) = \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \underbrace{\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}}_{n\text{-Mal}} T\left[V_1(t_1)\dots V_1(t_n)\right]dt_n\dots dt_1$$

$$\Rightarrow U_1(t,t_0) = \sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \underbrace{\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}}_{n\text{-mal}} T\left[V_1(t_1)\dots V_1(t_n)\right]dt_n\dots dt_1$$

Erinnert an $e^x = \sum_n \frac{1}{n!}x^n$

$\Rightarrow$ **Notation** $U_1(t,t_0) = T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_1(t')\,dt'\right)$ ← Das ist nur Notation, nicht so rechnen