Herleitung / Motivation Schrödinger Gl.

Annahmen:
- Superpositionsprinzip (wg. Doppelspalt)
- De-Broglie Beziehungen $E = \hbar\omega$, $p_i = \hbar k_i$

Folgerungen: Superpos. → Homogene DGL: $\hat{D}\psi = 0$ (falls $\neq 0$: $D(\psi_1+\psi_2) = C_1 + C_2 \neq C_1$!)
→ Linear in ψ: sonst Mischterme.
Ausgeschrieben: $\hat{D}\psi_1 = 0$, $\hat{D}\psi_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{D}(a\psi_1 + b\psi_2) = 0$, $a, b = \text{const.}$

Forderung / Ausgangspunkt: Freies Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ (~~also~~ scharf bestimmt, → nicht lokalisiert) wird durch Welle beschrieben
→ Entweder trigonometrische Lsg. oder komplexe Exponentialfkt.

Konstruktion:
- $$\hbar\omega = E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} \Leftrightarrow 0 = \hbar\omega - \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\vec{k}^2}{\omega} = \frac{2m}{\hbar} = \text{const.}$$

~~Mit Exponentialansatz $\psi \propto e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)}$~~

- Kann $\hat{D} \propto \vec{k}$ sein?
Da Superpos. gilt ~~muss~~ für Wellenpaket ~~aus $\hat{D}\psi_k = 0$~~
$$\psi = \int \psi_k \, C(\vec{k}) \, d\vec{k}$$
aus $\hat{D}\psi_k = 0$ auch $\hat{D}\psi = 0$ folgen
$$\hat{D}\psi = \hat{D}\int \psi_k \, C(\vec{k}) \, d^3\vec{k}$$
wenn $\hat{D} \propto \vec{k}$ dürfte man $\hat{D}$ und $\int d^3\vec{k}$ nicht vertauschen und die Folgerung würde nicht gelten
$\Rightarrow \hat{D} \not\propto \vec{k}$

- Mit Exponentialansatz $\psi \propto e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)}$ folgt aus (1), ~~folgt~~, dass $\hat{D} = a \cdot \partial_i^{2n} - b\,\partial_t^n$
(Für den reellen Ansatz kann eine derartige DGL nicht erfüllt sein ↪ nicht mgl!)

Einsetzen liefert
$$0 \stackrel{!}{=} \hat{D}\psi = (a\,\partial_i^{2n} - b\,\partial_t^n)\, C e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)}$$
$$= \left((-1)^n a (\vec{k}^2)^n - (-i)^n b (\omega)^n\right)\psi$$

Und vergleichen mit 1 liefert
- $n = 1$
- $a = \hbar^2/2m$
- $b = \hbar/i$

bzw.
$n = 1$
$a = (\hbar/i)^2/2m$
$b = i\hbar$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\left[i\hbar\,\partial_t - \left(\frac{\hbar\,\partial_i}{i}\right)^2 / 2m\right]}_{\hat{D}} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar\,\partial_t \psi(\vec{r}, t) = \frac{(\hbar/i\,\nabla)^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m}}_{= E_{kin}} \psi(\vec{r}, t)$$

Unter Annahme eines Potentials folgt $i\hbar\,\partial_t \psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})\right)\psi(\vec{r}, t)$