# Lösung finale DGL Zentralpotential

$$0 = \left(\partial_x^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{n}{x} - \frac{1}{4}\right) u(x) \quad , \; x = \frac{2r}{na_0}$$

Idee: Grenzwertbetrachtung für Produktansatz

- $x \to \infty$: $0 = \left(\partial_x^2 - \frac{1}{4}\right) u(x) \iff u(x) \propto e^{\pm x/2}$

  Da $u$ 1. normierbar & 2. physikalisch sinnvoll (i.e. Attraktives Potential → große Aufenthaltswsk bei Kern ($x$ klein)) sein sollte: $u(x) \propto e^{-x/2}$

- $x \to 0$: $0 = \left(\partial_x^2 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) u(x) \iff u(x) \propto x^{l+1}$ oder $u(x) \propto x^{-l}$

  Da $u$ normierbar sein sollte (und Aufenthaltswsk in Kern ($x=0$) klein) $u(x) \propto x^{l+1}$

→ Mit diesen Überlegungen „Extremfälle" abgefangen →
↳ „Sich gut verhaltende" Fkt als Rest möglich (i.e. Potenzreihe)

Ansatz: $u(x) = e^{-x/2} x^{l+1} \sum_{i=0}^{\infty} x^i c_i = e^{-x/2} \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+l+1} c_i$

$$u'(x) = -\frac{1}{2} u(x) + e^{-x/2} \sum_{i=0}^{\infty} (i+l+1) x^{i+l} c_i$$

$$u''(x) = \underbrace{\frac{1}{4} u(x)} - e^{-x/2} \sum_{i=0}^{\infty} (i+l+1) x^{i+l} c_i + e^{-x/2} \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(i+l)(i+l+1)}_{= i(i+2l+1) + l(l+1)} x^{i+l-1} c_i$$

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ -(i+l+1) x^{i+l} c_i + i(i+2l+1) x^{i+l-1} c_i + x^{i+l} \cdot n \cdot c_i \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+l} \left[ (-i-l-1+n) c_i + (i+1)(i+2l+2) c_{i+1} \right] + \cancel{c_0\, l(l+1) x^{l}}$$

$$c_{i+1} = +\frac{i+l+1-n}{(i+1)(i+2l+2)} c_i$$

Betrachte $c_{i+1} \to \frac{i}{i^2} c_i = \frac{1}{i} c_i \; (n \to \infty)$
⇔ Dann würde Reihe $\sum c_i x^i \to e^x$ gehen
$e^{-x/2} e^x = e^{x/2}$ würde versmieren
↯ kann nur aufgelöst werden, wenn $i_{max} = n-(l+1)$ erreicht wird und Reihe abbricht
⇒ $n \in \mathbb{N}$ (da $i, l \in \mathbb{N}_0$ folgt $n_{min} = 1$)

$c_0$ aus Normierung bestimmbar

⇒ Quantenzahl $|n l m\rangle$, $n \in [1, \infty) \cap \mathbb{N}$, $l \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}_0$
$m \in [-l, l] \cap \mathbb{Z}$

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} u(x)\Big|_{x = \frac{2r}{na_0}} = \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{na_0}} \sum_{i=0}^{n-l-1} c_i \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{i+l+1} = e^{-\frac{r}{na_0}} \sum_{i=0}^{n-(l+1)} \frac{2c_i}{na_0} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{i+l}$$

$$c_{i+1} = \frac{i+l+1-n}{(i+1)(i+2l+2)} c_i$$

$|1\,0\,0\rangle$: $1 \stackrel{!}{=} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{na_0}} \left|\frac{2c_0}{na_0}\right|^2 dr = + \frac{2|c_0|^2}{na_0} e^{-\frac{r}{na_0}}\Big|_{r=\infty}^{r=0} = \frac{2|c_0|^2}{na_0} \iff c_0 = \sqrt{\frac{na_0}{2}}$

$$E_n = -\frac{1}{n^2} R_0 = -\frac{1}{n^2} \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = -\frac{1}{2n^2} \frac{m\lambda^2}{\hbar^2}$$

→ $n^2$-fach Entartet $\left(g_n = \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)}_{m\text{-Entartung}} = n^2\right)$
(mit Spin: $2n^2$)

Siehe auch: → Zentralpotential