

# Quantengase

## Berechnung der großkanonischen Zustandssumme

$$Z_G = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu N)}$$

Hierfür bietet es sich an, den Zustand in der 1. Quantisierung zu betrachten:

$$|u\rangle = |N; n_1, n_2, \dots\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_{\lambda} n_{\lambda} = N, \quad \sum_{\lambda} n_{\lambda} \epsilon_{\lambda} = E$$

Wachstum  
 $\lambda=0: \epsilon_{\lambda}=0, n_{\lambda}=N$

Das ist die Spur

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\lambda}\}} \langle N; n_1, n_2, \dots | e^{-\beta(H - \mu N)} | N; n_1, n_2, \dots \rangle \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\lambda}\}} \exp -\beta \sum_{\lambda=0}^{\infty} [\epsilon_{\lambda} - \mu] n_{\lambda} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{\lambda}\}} \prod_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \exp -\beta (\epsilon_{\lambda} - \mu) \right]^{n_{\lambda}} \end{aligned}$$

Summe über alle Gesamtteilchenzahlen  $N$       Summe über alle Permutationen an Besetzungszahlen innerhalb eines Zustands mit  $N$  Teilchen      Produkt über Kombinationen aus  $j$  ten Energieniveaus und entsprechender Besetzungszahl  $n_{\lambda}$  für die Besetzung des Einteilchenzustands mit  $\epsilon_j$

~~Es gilt nun, wenn  $\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu) > 0$ , dann  $\exp -\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu) < 1$  und die Reihe konvergiert.~~

Insgesamt wird jeder Einteilchenzustand in der Summe über die Teilchenzustände von jeder möglichen Anzahl (Besetzungszahl) an Teilchen unabhängig von allen anderen Besetzungszahlen / Einteilchenzuständen etc.  $\rightarrow n_j$  unabhängig von  $\epsilon_j$

$$= \prod_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{n_{\lambda}=0}^{\infty} \left[ \exp -\beta (\epsilon_{\lambda} - \mu) \right]^{n_{\lambda}}$$

Jeder Einteilchenzustand wird von jeder möglichen Besetzungszahl an Teilchen besetzt

~~Basieren wir uns auf jeder Zustand beliebig oft besetzbar, dann gilt:  $\sum_{n_{\lambda}=0}^{\infty} \left[ \exp -\beta (\epsilon_{\lambda} - \mu) \right]^{n_{\lambda}} = \frac{1}{1 - \exp -\beta (\epsilon_{\lambda} - \mu)}$  gilt nur, wenn  $\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu) > 0$ , d.h.  $\epsilon_{\lambda} > \mu$ . (Aber Punkt bei  $\epsilon_{\lambda} = \mu$  muss man für)~~

Siehe auch 1. Quantisierung großkanonischer Ensemble