# Drehimpuls und Dirac-Glg:

- Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{r} \times \nabla$

$$H_D = c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2$$

$$[L_i, H_D] = c [L_i, \alpha_m p_m + \beta m c]$$ , $\vec{\alpha}, \beta$ aus Spinor-Hilbertraum, $\vec{L}$ aus Raumteil $\rightarrow [\vec{L}, \vec{\alpha}] = [\vec{L}, \beta] = 0$

$$= \frac{\hbar c}{i} \alpha_m \varepsilon_{ijk} \left[ r_j \partial_k , \frac{\hbar}{i} \partial_m \right]$$ , Satz v. Schwarz

$$= \frac{\hbar c}{i} \varepsilon_{ijk} \alpha_m \frac{\hbar}{i} [r_j, \partial_m] \partial_k$$

$$= -\frac{\hbar c}{i} \varepsilon_{jmk} \alpha_m \frac{\hbar}{i} \partial_k = i \hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p})_i$$

- Spin Definiere $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \sigma_0 \otimes \vec{\sigma}$

$$[S_i, H_D] = c [S_i, \alpha_m p_m + \beta m c]$$

in 1. Komp identität; in 2. Komp. identität → kommutiert

$$= \frac{\hbar c}{2} \left( [\sigma_0 \otimes \vec{\sigma}_i, \alpha_m p_m] + mc [\sigma_0 \otimes \vec{\sigma}, \sigma_3 \otimes \sigma_0] \right)$$

$\alpha_m = \sigma_1 \otimes \sigma_m$

$$= \frac{\hbar c}{2} \sigma_1 \otimes \underbrace{[\sigma_i, \sigma_m]}_{= 2 i \varepsilon_{imk} \sigma_k} p_m$$

$$= i \hbar c \, \varepsilon_{imk} \underbrace{\sigma_1 \otimes \sigma_k}_{= \alpha_k} p_m = -i \hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p})_i$$

$$= - [L_i, H_D]$$

⇒ Bahndrehimpuls und Spin vertauschen einzeln nicht mit $H_D$, zusammen gilt jedoch: $\vec{J} := \vec{L} + \vec{S}$

$$[\vec{J}_i, H_D] = [L_i, H_D] + [S_i, H_D] = [L_i, H_D] - [L_i, H_D] = 0$$

Der Gesamtdrehimpuls ist erhalten. Dieser ist $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$