Instantane Basis

Unter der Annahme, dass das Adiabatische Theorem gilt:

$\Leftrightarrow$ wenn $|\psi(t_0)\rangle = |n\rangle$ (also System zu Beginn im n-ten Zstd.)
dann wird das System auch später im n-ten Zustand bleiben.
Dieser muss dann aber <u>nicht</u> mehr gleich aussehen.

Idee: Die Zeitabhängigkeit des Hamiltonians lässt sich durch zeitabhängigen Parametervektor ausdrücken.
Dann sollte (hoffentlich) die Zeitabhängigkeit des n-ten Zustands gleich parametrisierbar sein!

$$\rightarrow \quad H(t) = H(\vec{R}(t)) \quad \rightsquigarrow \quad |n(t)\rangle = |n(\vec{R}(t))\rangle, \quad \vec{R}(t) - \text{Parametervektor}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(\vec{R}(t))\,|n(\vec{R}(t))\rangle = E_n(\vec{R}(t))\,|n(\vec{R}(t))\rangle$$

Zu jedem Zeitpunkt t lässt sich dann ein bestimmter Parametervektor $\vec{R}$ finden
Mit diesem lässt sich dann $H(\vec{R})$ bestimmen, diesen zu diagonalisieren liefert $E_n(\vec{R}), |n(\vec{R})\rangle$

Da System im n-ten Zstd. bleibt:

Ansatz für Zeitentwicklungsoperator:

$$\Omega(t_0,t) = \sum_m |m(\vec{R}(t_0))\rangle\langle m(\vec{R}(t))|$$ kann als Näherung für $U^{-1}(t_0,t)$ verwendet werden.

$$\rightarrow \quad \Omega^{-1}(t_0,t) = U(t,t_0)$$

$$\Omega^{-1}(t_0,t) = \sum_m |m(\vec{R}(t))\rangle\langle m(\vec{R}(t_0))|$$

(Beweis: $\sum_{nm} \overbrace{|n(\vec{R}(t))\rangle\langle n(\vec{R}(t_0))|}^{\Omega^{-1}} \overbrace{|m(\vec{R}(t_0))\rangle\langle m(\vec{R}(t))|}^{\Omega}$, mit $\langle n(\vec{R}(t_0))|m(\vec{R}(t_0))\rangle = \delta_{nm}$, $= \sum_m |m(\vec{R}(t))\rangle\langle m(\vec{R}(t))| = \mathbb{1}$ Vollständigkeit)

Notation: $|m_0\rangle = |m(\vec{R}(t_0))\rangle$

Betrachte Übergang in mitbewegte Basis: $\rightarrow$ dort WF konstant

$$|\phi_n(t)\rangle = \Omega(t_0,t)\,|\psi(t)\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \Omega^{-1}(t_0,t)\,|\phi(t)\rangle$$

„Zeitentwicklung" bzw. Basiswechseloperator; Schrödinger WF in konstanter Basis

Adiabatisches Theorem: $|\psi(t)\rangle = |n(\vec{R}(t))\rangle$

$$= \sum_m |m_0\rangle \underbrace{\langle m(\vec{R}(t_0))|n(\vec{R}(t))\rangle}_{=\delta_{mn}}$$

$$= |n_0\rangle$$

Betrachte zeitliche Änderung:

$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$

$$i\hbar\partial_t|\phi_n(t)\rangle = i\hbar\left(\dot{\Omega}(t_0,t)|\psi(t)\rangle + \Omega(t_0,t)|\dot{\psi}(t)\rangle\right)$$

$$= i\hbar\,\dot{\Omega}\Omega^{-1}|\phi_n(t)\rangle + \Omega H \Omega^{-1}|\phi_n(t)\rangle$$

sollte klein sein, da adiabatische (langsame) Änderung

$$= \tilde{H}|\phi(t)\rangle \quad ; \quad \tilde{H} = \underbrace{\Omega H \Omega^{-1}}_{\equiv H_0} + \underbrace{i\hbar\,\dot{\Omega}\Omega^{-1}}_{\equiv V}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega H \Omega^{-1} = \sum_{n,m} |n_0\rangle\langle n(\vec{R}(t))| \underbrace{\overset{H(\vec{R}(t))}{H}|m(\vec{R}(t))\rangle}_{=E_m(\vec{R}(t))|m(\vec{R}(t))\rangle}\langle m_0|$$

$$= \sum_m E_m(\vec{R}(t))\,|m_0\rangle\langle m_0|$$

$$\rightarrow \quad i\hbar\,\dot{\Omega}\Omega^{-1} = i\hbar\sum_{l,m} \overset{|l_0\rangle\,\dot{\vec{R}}(t)}{}\left(\nabla_{\vec{R}}\langle l(\vec{R}(t))|\right)|m(\vec{R}(t))\rangle\langle m_0|$$ „Scheinkraft"