

# 7. Quantisierung

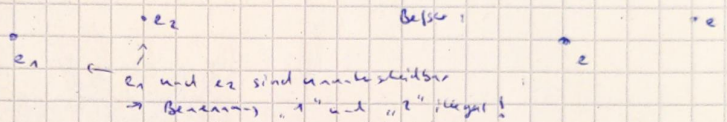
In QM sind Teilchen (einer Teilchensorte, bspw.  $e^-$ ) nicht voneinander unterscheidbar.  
 Mehrteilchenprobleme ( $N$  Teilchen)  
 Betrachtet man also  $\checkmark$  bspw. Quantengase (i.e. Systeme mehrerer <sup>freier QM-Teilchen</sup> ~~nicht unterscheidbarer~~ Teilchen)  
 so kann man nicht wissen, welches Teilchen in welchem Zustand ist.

Durch Messungen von bspw. der Energie kann höchstens ermittelt werden, wie viele der  $N$  Teilchen in  $j$ -ten Energiezustand sind.

Will man hier für die Wellenfunktion konkret aufschreiben als Produkt der Einzelteilchen-Wellenfunktionen, so muss diese WF alle möglichen Permutationen berücksichtigen.

Da diese Permutationen jedoch nicht unterscheidbar sind, da sie alle dieselbe Gesamtenergie (bzw. Gesamtsystemwert) liefern, muss noch durch die Wurzel der Anzahl an Permutationen dividiert werden.

Bsp.:



$|2\rangle = |2_1\rangle|2_2\rangle$  muss gleich sein unter Vertauschung von 1, 2

$$\lambda |2_2\rangle|2_1\rangle = P_{12} |2\rangle$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 maximal noch komplexer Phase erlaubt, da Betrag gleich sein muss:  $\lambda = e^{i\varphi}$

$P_{12}^2 |2\rangle = |2\rangle$ , zweifaches Vertauschen liefert wieder Originalzustand.

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1, \quad e^{i2\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = k\pi, \quad \lambda = \pm 1$$

$\lambda = 1$  : Bosonen,  $|2_1\rangle|2_2\rangle = |2_2\rangle|2_1\rangle$

$\lambda = -1$  : Fermionen,  $|2_1\rangle|2_2\rangle = -|2_2\rangle|2_1\rangle$

Betrachte Energie bei der ein Teilchen in  $\uparrow$  Zustand und eines in  $\downarrow$  Zustand ist

$$\Rightarrow |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\text{Boson})$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\text{Fermion})$$

$\uparrow$   
 alle Permutationen

alle Permutationen, da  $\langle\uparrow\uparrow|\uparrow\uparrow\rangle = 1, \langle\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle = 0, \langle\downarrow\uparrow|\downarrow\uparrow\rangle = 1$

$\Rightarrow$  Komplizierte Prozess, bereits bei 3 Teilchen kein SpA!

$\rightarrow$  Gase haben  $\sim (10^{23})$  Teilchen, so eine Rechnung praktisch unmöglich!

$\Rightarrow$  Die Basis, in der die Teilchen explizit genannt werden ist maximal ungeschicklich!!!

Bessere Basis! • Da sowieso nur gemessen werden kann, wieviele ( $n_j$ ) Teilchen im  $j$ -ten Zustand  $|j\rangle$  sind, ist die Basis

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle \quad \text{bessere Bezeichnung}$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 1. Zustand    2. Zustand    ...

• Für die  $n_j$  muss gelten  $\sum_j n_j = N$ . Das sind die Besetzungszahlen der Zustände.  $n_j$  gibt also an, wieviele (nicht welche!) Teilchen in  $j$ -ten Zustand sind

• Die Gesamtenergie ergibt sich also zu  $E = \sum_j n_j \epsilon_j$   
 mit  $n_j$  = Besetzungszahl, siehe oben  
 $\epsilon_j$  = Energie des  $j$ -ten Zustandes