Produktzustände

Betrachte ein aus mehreren Teilsystemen zusammengesetztes System und einen reinen Zstd.:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad , \quad |\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} \, |n^A_A\rangle |m^B_B\rangle$$

Welche Bedingung stellt sich an c, sodass $|\psi\rangle$ das Kroneckerprodukt von zwei nur in den Teilsystemen definierten Zuständen ist?

1. Überlegung:
   - c_{nm} ist für die Mischung der Teilsysteme verantwortlich.
   - $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$ muss nicht gelten
     $\Rightarrow$ c_{nm} ist eine $(\dim \mathcal{H}_A) \times (\dim \mathcal{H}_B)$ - Matrix
   - Jeder Vektor $\vec{\alpha} \in \mathcal{H}_A$ und Vektor $\vec{\beta} \in \mathcal{H}_B$ besitzt jeweils die passende Dimensionalität $\dim \alpha = \dim \mathcal{H}_A$, $\dim \beta = \dim \mathcal{H}_B$

   $\rightarrow$ Wenn also ein Produkt von $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ gebildet werden kann, das die Dimensionen erhält, so wäre dieses Produkt und zwei Vektoren $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ passende Kandidaten

   $\rightarrow$ Dieses Produkt ist das dyadische Produkt:

   $$\vec{\alpha} \otimes \vec{\beta}^T = c \qquad \text{index:} \quad \alpha_n \beta_m = c_{nm}$$

   Diese Schreibweise wird ~~…~~

   Das dyadische Produkt entspricht dem Kroneckerprodukt eines Spalten- mit einem Zeilenvektor,

   $\vec{\alpha}$ - Spaltenvektor
   $\vec{\beta}$ - Zeilenvektor

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n^A\rangle |m^B\rangle = \sum_{n,m} \alpha_n \beta_m |n^A\rangle |m^B\rangle$$

$$= \sum_n \alpha_n |n^A\rangle \sum_m \beta_m |m^B\rangle = |\psi^A\rangle |\psi^B\rangle$$

$|\psi^A\rangle$: nur in $\mathcal{H}_A$ definiert, $\Rightarrow$ Zstd. in System A; eigtl. Kroneckerprodukt $\otimes$; $|\psi^B\rangle$: nur in $\mathcal{H}_B$ definiert, Zstd. in System B

Bem: $|\psi^A\rangle$, $|\psi^B\rangle$ müssen nicht normiert sein, solange $\sum_{n,m} |\alpha_n|^2 |\beta_m|^2 = 1$

Betrachte Dichtematrix eines solchen Zustandes in Syst. A (OBdA, siehe Dichtematrizen von Teilsyst.)

$$\rho^A = \sum_m c^*_{nm} c_{n'm} |n^A\rangle\langle n'^A| = \sum_m |\beta_m|^2 \alpha^*_n \alpha_{n'} |n^A\rangle\langle n'^A|$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, \rho^A = \sum_\nu \langle \nu | \rho^A | \nu \rangle = \sum_{m,\nu} |\beta_m|^2 \alpha^*_n \alpha_{n'} \underbrace{\langle \nu | n^A \rangle}_{\delta_{\nu n'}} \underbrace{\langle n'^A | \nu \rangle}_{\delta_{n\nu}}$$

$$= \delta_{nn'}$$

$$= \sum_{m,n} |\beta_m|^2 |\alpha_n|^2 = 1$$

$$\mathrm{tr}[(\rho^A)^2] = \sum_\nu \langle \nu | \rho^{A2} | \nu \rangle = \cancel{\sum_{m,m',\nu} |\beta_m|^2 |\beta_{m'}|^2 \alpha^*_n \alpha_{n'} \alpha^*_k \alpha_{k'} \langle \nu | n^A \rangle\langle n'^A | k^A \rangle\langle k' | \nu \rangle}$$

$$= \cancel{\sum_{m,m',\nu} |\beta_m|^2 |\alpha_n|^2 |\beta_{m'}|^2} |\alpha_{n'}|^2$$

$$= \sum_{m,m',\nu,\nu'} |\beta_m|^2 |\beta_{m'}|^2 \underbrace{\langle \nu | n^A \rangle}_{\delta_{\nu n'}} \underbrace{\langle n'^A | \nu' \rangle}_{\delta_{n \nu'}} \underbrace{\langle \nu' | k^A \rangle}_{\delta_{\nu' k}} \underbrace{\langle k'^A | \nu \rangle}_{\delta_{k' \nu}} \alpha^*_n \alpha_{n'} \alpha^*_k \alpha_{k'} = \delta_{nk} \delta_{n'k'}$$

$$= \sum_{m,m',n,n'} |\beta_m|^2 |\beta_{m'}|^2 |\alpha_n|^2 |\alpha_{n'}|^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Ist ein Zustand kein Produktzustand so heißt er verschränkt.

Dichtematrizen von Teilsystemen

Siehe auch