Entartete Störungstheorie

Voraussetzungen:

- $(H_0 - \lambda \overset{\text{Hermitesch}}{V} - E_n)|\psi_n\rangle = 0$, $(H_0 - E_n^{(0)})|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle = 0$
- $E_n^{(0)}$ ist EW für g Eigenzustände $\{|\phi_{n,1}^{(0)}\rangle, \dots, |\phi_{n,g}^{(0)}\rangle\}$

Ansatz wieder: $E_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k E_n^{(k)}$, $|\psi_n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k |\phi_n^{(k)}\rangle$

Getrennte Betrachtung: $|\phi_q^{(0)}\rangle \in$ nicht entartete Sub-Hilbertraum

$|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle \in$ entarteter Sub-Hilbertraum

$\Rightarrow \quad 1 = \sum_{p \neq n} |\phi_q^{(0)}\rangle\langle\phi_q^{(0)}| + \sum_{l=1}^{g} |\phi_{n,l}^{(0)}\rangle\langle\phi_{n,l}^{(0)}|$

$\Rightarrow$ $|\phi_q^{(0)}\rangle, |\phi_q^{(k \neq 0)}\rangle$ können wieder orthogonal gewählt werden,
ebenso $|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle, |\phi_{n,l}^{(k)}\rangle$ aber
$\langle\phi_q^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k)}\rangle \neq 0$, $\langle\phi_{n,l}^{(0)}|\phi_{n,p}^{(k)}\rangle \neq 0$

Betrachtung für $k=1$: Nicht entartete Teil siehe nicht entartete ST

$$\langle\phi_{n,p}^{(0)}| \quad (H_0 - E_n^{(0)})|\phi_{n,l}^{(1)}\rangle = E_{n,l}^{(1)}|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle - V|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad 0 = E_{n,l}^{(1)} \underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle}_{=\delta_{pl}} - \underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|V|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle}_{= V_p \delta_{lp}}$$

$\Rightarrow$ Die entarteten Eigenfunktionen der 0-ten Ordnung <u>müssen</u> so gewählt werden, dass in dieser Basis V diagonal ist, dann: $E_{n,l}^{(1)} = \langle\phi_{n,l}^{(0)}|V|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle = V_{ll}$

Ab hier wahrscheinlich zu kompliziert (und glaub falsch :))

Beliebige k:

$$\langle\phi_{n,p}^{(0)}| \quad (H_0 - E_n^{(0)})|\phi_{n,l}^{(k)}\rangle = -V|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle + \sum_{m=0}^{k-1} E_{n,l}^{(k-m)}|\phi_{n,l}^{(m)}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad 0 = E_{n,l}^{(k)} \underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(0)}\rangle}_{=\delta_{pl}} - \underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|V|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle} + \sum_{m=1}^{k-1} E_{n,l}^{(k-m)}\langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(m)}\rangle$$

$$\sum_{q=1}^{g} \underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|V|\phi_{n,q}^{(0)}\rangle}_{= V_p \delta_{pq} = E_{n,p}^{(1)}\delta_{pq}}\langle\phi_{n,q}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle + \underbrace{\sum_{a \neq n} \underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|V}_{= V_p \langle\phi_{n,p}^{(0)}|}|\phi_a^{(0)}\rangle\langle\phi_a^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle}_{=0} \quad , \langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_a^{(0)}\rangle = 0$$

$$= E_{n,l}^{(k)}\delta_{pl} + (E_{n,l}^{(1)} - E_{n,p}^{(1)})\underbrace{\langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle}_{\begin{cases} =0 & p=l \\ \neq 0 & p \neq l \end{cases}} + \sum_{m=1}^{k-2} E_{n,l}^{(k-m)} \langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(m)}\rangle \quad \begin{cases} =0, & p=l \\ \neq 0, & p \neq l \end{cases}$$

$$\langle\phi_q^{(0)}| \quad \Rightarrow (E_q^{(0)} - E_n^{(0)})\langle\phi_q^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k)}\rangle = -\underbrace{\langle\phi_q^{(0)}|V|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle} + \sum_{m=0}^{k-1} E_{n,l}^{(k-m)} \underbrace{\langle\phi_q^{(0)}|\phi_{n,l}^{(m)}\rangle}_{=0 \text{ für } m=0}$$

$$= \sum_{p=1}^{g} V_p \underbrace{\langle\phi_q^{(0)}|\phi_{n,p}^{(0)}\rangle}_{=0}\langle\phi_{n,p}^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle + \sum_{p \neq n}\langle\phi_q^{(0)}|V|\phi_p^{(0)}\rangle\langle\phi_p^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1} E_{n,l}^{(k-m)}\langle\phi_q^{(0)}|\phi_{n,l}^{(m)}\rangle - \sum_{p \neq n}\langle\phi_q^{(0)}|V|\phi_p^{(0)}\rangle\langle\phi_p^{(0)}|\phi_{n,l}^{(k-1)}\rangle$$