Eichinvarianz (der Diracgl.)

Betrachte 4 Vektorpotential:

Da das Vektorpotential keine physikalisch beobachtbare Größe ist:
(sondern nur der Feldstärketensor (welcher ausschl. Ableitungen enthält))

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad)$$

4 Vektorpotential sollte gewisse Eichinvarianz besitzen, da
bspw. • Ableitungen von konstanten Termen wegfallen
• $F^{\mu\nu} = 0$ für $g^{\mu\nu}$

Betrachte: - Eichtrafo der Form $A^\mu \to A^{\mu\prime} = A^\mu + \alpha^\mu$ $\quad (\alpha^\mu = \alpha^\mu(x))$
- Diracgleichung, die von WF ψ_0 gelöst wird:

$$0 = [i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc]\psi_0 \qquad (D_0)$$

Einsetzen liefert
$$0 = \left[i\hbar\gamma^\mu\left(D_\mu - \frac{iq}{\hbar c}\alpha_\mu\right) - mc\right]\psi_0$$
$$= \underbrace{[i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc]\psi_0}_{=0\ (D_0)} + \frac{iq}{\hbar c}\gamma^\mu\alpha_\mu\psi_0$$

Da γ^μ vor allem im Spinraum und α_μ vor allem in Raumzeit wirken wird $\gamma^\mu\alpha_\mu$ nur dann 0, wenn $\alpha^\mu_\mu = 0$ gilt
→ keine Eichtrafo
⇒ Es genügt nicht nur A^μ zu transformieren

(Reminder: Lorentzinvarianz: Sowohl kovariante Ableitung als auch WF werden transformiert)

Neuer Versuch: $\psi_0 \to \psi' = \psi_0\phi_{WF}$, $A^\mu \to A^{\mu\prime} = A^\mu + \alpha^\mu$
ψ_0, A^μ_0 erfüllen weiterhin (D_0)

$$\rightarrow \quad 0 = \left[i\hbar\gamma^\mu\left(D_\mu - \frac{iq}{\hbar c}\alpha_\mu\right) - mc\right]\psi_0\phi_{WF}$$
$$= \phi_{WF}\underbrace{[i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc]\psi_0}_{=0} + i\hbar\gamma^\mu\psi_0\left[\partial_\mu\phi - \frac{iq}{\hbar c}\alpha_\mu\right]\phi_{WF}$$
$$+\ i\hbar\gamma^\mu\psi_0\left(\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c}\alpha_\mu\right)\phi_{WF}$$

α^μ enthält keine Ableitungen, A^μ auch nicht → $\cancel{[\alpha^\mu, A^\mu]=0}$ $\alpha^\mu\phi = \phi\alpha^\mu$

$$= \underbrace{i\hbar\gamma^\mu\psi_0}_{\neq 0}\left(\underbrace{\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c}\alpha_\mu}\right)\phi_{WF}$$

$\in$ Raumzeit ⇒ ϕ_{WF} muss kein Spinor (objekt) sein, sondern ausreichend wenn $\phi \in RZ$

übrig bleibt $\partial_\mu\phi_{WF} = \frac{iq}{\hbar c}\alpha_\mu\phi_{WF}$

~~⇒ φ ∝ exp~~ $\quad \int\frac{d\phi_{WF}}{\phi_{WF}} = \frac{iq}{\hbar c}\int\alpha_\mu(x)\,dx^\mu$, $\quad \phi_{WF} = \exp\frac{iq}{\hbar c}\int\alpha_\mu(x)\,dx^\mu$

⇒ $\phi_{WF} \propto \exp$, $\quad \alpha_\mu = \partial_\mu\chi(x)$

$\phi_{WF} = \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\chi(x)\right)$ $\quad x = (ct, \vec r)$ $\quad$ Da A_μ in Diracgl.

⇒ $\psi_0 \to \psi_0\exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\chi\right)$, $\quad$ Skalarpot. $\phi_{SP} \to \phi_{SP} - \frac{\partial_0}{c}\chi$, $\quad \vec A \to \vec A + \nabla\chi$