Der Harmonische Oszillator (Hamiltonian)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 r_i^2$$

$$\rightarrow \quad \hat{H} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\hbar^2}{m}\Delta + m\sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 \hat{r}_i^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\omega_i^2 \hat{r}_i^2 - \underbrace{\frac{\hbar^2}{m^2}\partial_i^2}_{=\left(\frac{i}{m}\hat{p}_i\right)^2}\right)$$

Überlegung:
- Masse kann den Einfluss des Potentials / der kin Energie skalieren!
  - $m \to 0 \Rightarrow V \to 0$, Lösungen Ebene Wellen (Eigenfkt. Impuls)
  - $m \to \infty \Rightarrow V \to \infty$, Lösungen Diskret (Eigen fkt. des Ortsop)

$\rightarrow$ Gesamtlösung mgl. weise Linearkombi aus beiden

Ansatz: Operator, der LK aus Ort & Impuls ist

- Diese Operator sollte mgl. dimensionslos sein
- Energie ist im Wesentlichen (zumindest Potential) durch ω_i bestimmt

$$\rightarrow \quad \hat{H} = \sum_i \underbrace{\hbar\omega_i}_{\text{Dim: Energie}} \cdot \frac{m\omega_i}{2\hbar}\left(\underbrace{\hat{r}_i^2 - \left(\frac{i}{m\omega_i}\hat{p}_i\right)^2}\right)$$

$$= \left(\hat{r}_i - \frac{i}{m\omega_i}\hat{p}_i\right)\left(\hat{r}_i + \frac{i}{m\omega_i}\hat{p}_i\right) + \frac{\hbar}{m\omega_i}$$

$$= \hat{r}_i^2 - \left(\frac{i}{m\omega_i}\hat{p}_i\right)^2 + \frac{i}{m\omega_i}\underbrace{[\hat{r}_i, \hat{p}_i]}_{= i\hbar}$$

Def: $\sqrt{\frac{m\omega_i}{2\hbar}}\left(\hat{r}_i + \frac{i}{m\omega_i}\hat{p}_i\right) \equiv \hat{a}_i$

$\Rightarrow \quad \hat{a}_i^+ = \sqrt{\frac{m\omega_i}{2\hbar}}\left(\hat{r}_i - \frac{i}{m\omega_i}\hat{p}_i\right)$

$\Rightarrow \quad \hat{r}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}}\,\frac{\hat{a}_i + \hat{a}_i^+}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \xi_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}}$

$\hat{p}_i = \sqrt{\hbar m\omega_i}\,\frac{\hat{a}_i - \hat{a}_i^+}{\sqrt{2}\,i} \quad \rightsquigarrow \pi_i = \sqrt{\hbar m\omega_i}$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \frac{m\omega_i}{2\hbar}\left(-\frac{i}{m\omega_i}[\hat{r}_i, \hat{p}_j] + \frac{i}{m\omega_i}[\hat{p}_i, \hat{r}_j]\right) = 1\,\delta_{ij}$$

$$\hat{H} = \sum_i \hbar\omega_i\left(\underbrace{\hat{a}_i^+\hat{a}_i} + 1/2\right)$$

Sanity Check: ist $\hat{a}_i^+\hat{a}_i$ hermitesch? $\rightarrow \hat{H}$ ist es, dann müsste $\hat{a}_i^+\hat{a}_i$ das auch sein: $(\hat{a}_i^+\hat{a}_i)^+ = \hat{a}_i^+(\hat{a}_i^+)^+ = \hat{a}_i^+\hat{a}_i$ ✓

Def: $\hat{N}_i = \hat{a}_i^+\hat{a}_i$

$[\hat{N}_j, \hat{a}_i] = [\hat{a}_j^+\hat{a}_j, \hat{a}_i] = [\hat{a}_j^+, \hat{a}_i]\hat{a}_j = -\hat{a}_i$

$[\hat{N}_i, \hat{a}_i^+] = [\hat{a}_j^+\hat{a}_j, \hat{a}_i^+] = \hat{a}_j^+[\hat{a}_j, \hat{a}_i^+] = \hat{a}_i^+$

Da $\hat{H} = \hat{H}(\hat{N}) \Rightarrow [\hat{H}, \hat{N}] = 0$

$\hat{H}$ und $\hat{N}$ teilen sich also einen Satz von Eigenfunktionen

Die Eigenwertgleichung zu $\hat{N}$ sei oBdA

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$