Eichinvarianz der Schrödingergleichung: (in SI Einheiten)

Reminder Diracglg: · A_μ als kovariante Vektor in Diracglg
 · Eichtrafo gemäß $\begin{cases} \psi \to \psi' = \psi\, e^{\frac{iq}{\hbar}\chi} \\ A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \end{cases}$ — da in SI, sonst $\frac{q}{\hbar c}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\phi' = \phi - \partial_t \chi \\ \vec{A}' = A + \nabla\chi\end{pmatrix}$ ← wegen kovariant!

→ Lokale Symmetrie, da Phasenfaktor ($e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}$) abhängig von x & t-Werten

~~Versuch~~
Test: Geht dieselbe Trafo auch für Schrödingerglg.

$$i\hbar\, \partial_t \psi = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + \underbrace{V}_{= q\phi}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 - (i\hbar\partial_t - q\phi)\right]\psi \qquad (S_0) \text{ , untransformierte SG}$$

Setze Eichtrafo in rechte Seite ein und ausrechnen
→ wenn Ergebnis $= 0$ geht dieselbe Eichtrafo, ansonsten nicht

Strategie: „Phasenterm an Operatoren vorbeiziehen"

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A} - q(\nabla\chi)\right)^2 - \left(i\hbar\partial_t - q\phi + q(\partial_t\chi)\right)\right] e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi$$

$$= \Big[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A} - q(\nabla\chi)\right) e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\big(\underbrace{q(\nabla\chi) + \vec{p}}_{=(\vec{p}\, e^{\frac{iq}{\hbar}\chi})} - q\vec{A} - q(\nabla\chi)\big)\psi$$

$$- \cancel{i\hbar\partial_t}\, e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\big(\underbrace{-q(\partial_t\chi) + i\hbar\partial_t}_{=(i\hbar\partial_t e^{\frac{iq}{\hbar}\chi})} - q\phi + q(\partial_t\chi)\big)\psi\Big]$$

$$= \Big\{ e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\Big[\frac{1}{2m}\big(\underbrace{\underbrace{q(\nabla\chi) + \vec{p}}_{=(\vec{p}\, e^{\frac{iq}{\hbar}\chi})} - q\vec{A} - q(\nabla\chi)}_{= \vec{p} - q\vec{A}}\big)(\vec{p} - q\vec{A}) - (i\hbar\partial_t - q\phi)\Big]\psi$$

$$= e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\underbrace{\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 - (i\hbar\partial_t - q\phi)\right]\psi}_{= 0 \quad (S_0)}.$$

→ Die Schrödingergleichung ~~Eichtransformation~~ ist ebenfalls invariant unter der Eichtransformation:

$$\psi \to \psi' = e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\,\psi$$
$$\phi \to \phi' = \phi - \partial_t\chi$$
$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$$