Adiabatische Näherung

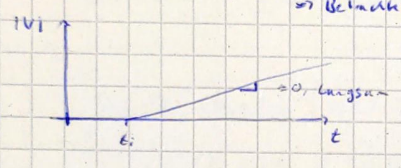
Bedeutung Adiabatisch: In TD bedeutet adiabatisch, dass ein System bei WW mit der Umgebung keine Wärme austauscht.
Oft bleibt dort zusätzlich die Entropie konstant (dann reversibel).
In diesem Sinne sind reversibel adiabatische Prozesse solche Prozesse, die den eigentlichen Zustand nicht ändern.

Adiabatisches Theorem: Geht man zu Beginn der Störung von einem System im n-ten Zustand aus, so wird das System im n-ten Zustand bleiben. Seine Energie und Wellenfunktion müssen dabei jedoch <u>nicht</u> konstant bleiben.
$\Rightarrow$ Hierbei darf es dann natürlich <u>keine Entartungen</u> oder kontinuierliches Spektrum geben.

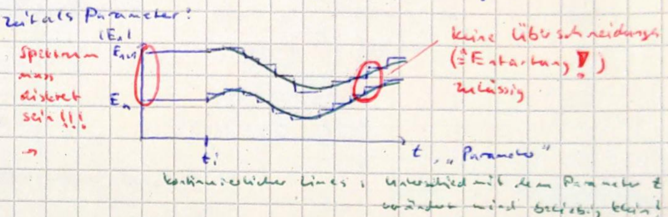
Motivation: Bei konstanter & harmonischer Störung hat man gesehen, dass die Änderung des Zustands hauptsächlich aus Dynamik der Störung kommt.
(Bei konstanter Störung Dynamik = 2x zeitliche Deltapeaks,
bei harmonischer Störung Dynamik = const)
$\rightarrow$ Idee: wenn Syst. in seinem Istzustand bleiben soll, darf die Störung nicht viel Dynamik besitzen

$$\rightarrow \frac{dV_1}{dt} \simeq 0 \quad \forall t \qquad \text{„Störung ändert sich langsam“}$$

$\Rightarrow$ Betrachte Zeit als Parameter!



$\rightarrow$



Rechnung: Ausgangssystem $|\psi_1(t<t_i)\rangle = |n\rangle$, $E_n|n\rangle = H_0|n\rangle$

$$\rightarrow |\psi_1(t)\rangle = U_1(t, t_0 < t_i)|n\rangle$$

$$\simeq \left(1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t} V_1(t')dt'\right)|n\rangle$$

Änderung der Störung klein
$\Rightarrow$ Insbesondere für $t \to t_i^+$ Betrag der Störung klein
$\rightarrow$ 1. Ordg ST

$$= |n\rangle \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t} \sum_m |m\rangle\langle m| V_1 |n\rangle \, dt'$$

$$= |n\rangle - |n\rangle \int_{t_i}^{t} \langle n|V_1|n\rangle dt' - \sum |m\rangle \frac{V_{mn}(t)}{E_m - E_n}$$

Da man zunächst (für $t \to t_i^+$) davon ausgehen kann, dass das Syst. in den ursprünglichen Eigenzuständen bleibt, kann $|\psi_1(t)\rangle$ nach diesen entwickelt werden
$\rightarrow$ Interessant ist vor allem die Übergangsamplitude $a_{m\leftarrow n} = \langle m|\psi_1(t)\rangle \quad \forall m \neq n$

$$a_{m\leftarrow n} = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t} \langle m|V_1(t')|n\rangle dt' = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t} V_{mn}(t')\, e^{i\overbrace{\scriptstyle\frac{E_m - E_n}{\hbar}}^{=\omega_{mn}} t'} dt'$$

$V_1(t') = e^{iH_0 t/\hbar}\, U(t)\, e^{-iH_0 t/\hbar}$

$$\overset{\text{PI}}{=} \frac{e^{i\omega_{mn}t'}}{E_n - E_m} V_{mn}(t')\Big|_{t_i}^{t} + \int_{t_i}^{t} \frac{e^{i\omega_{mn}t'}}{E_m - E_n} \langle m| \underbrace{\frac{\partial V(t')}{\partial t'}}_{\simeq 0} |n\rangle dt'$$

$|V(t_i)| = 0 \rightarrow V_{mn}(t_i) = 0$

$\simeq 0$, langsame Änderung, ausserdem noch mit oszillierendem Term multipliziert

$$\simeq -\frac{\langle m|V(t)|n\rangle}{E_m - E_n} e^{i\omega_{mn}t}$$

$$\Rightarrow |\psi_1(t)\rangle \simeq |n\rangle + \sum_{m\neq n} a_{m\leftarrow n}(t)|m\rangle = |n\rangle - \sum_{m\neq n} |m\rangle \frac{\langle m|V(t)|n\rangle}{E_m - E_n} e^{i\omega_{mn}t}$$

Im Schrödingerbild folgt $\left(|n_1\rangle = e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}|n_s\rangle = |n_s\rangle e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \right)$

$$|\psi_s(t)\rangle = |n_s\rangle e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} - \sum_{m\neq n} |m_s\rangle \frac{\langle m|V(t)|n\rangle}{E_m - E_n} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$$e^{i\omega_{mn}t}\, e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$$\rightarrow \quad |\psi_s(t)\rangle = \Big(\underbrace{|n\rangle - \sum_{m\neq n} |m\rangle \frac{\langle m|V(t)|n\rangle}{E_m - E_n}} \Big) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

Reminder: $= |n^{(1)}\rangle$ in zeitunabhängiger Störungstheorie