Die Diracglg.

Annahmen: Gültigkeit von
- Superpositionsprinzip → DGL linear in ψ & homogen
- Relativistischer Energie-Impuls Beziehung

Forderung: Möglichst einfache DGL, die:
- Den gesamten Zstd. beschreibt → Zeitableitung 1. Ordnung
- Deren Form Lorentzinvariant ist → Dimension räumliche = Dim. zeitliche Ableitung

⇒ Nur Ableitungen 1. Ordnung (1)

- Beobachtbare Energie liefert → Hamiltonian hermitesch

Konstruktion: Aufgrund von Forderung 1 wird wird in Analogie zum Hamiltonian folgender Ansatz gemacht:

$$+\gamma_0 i\hbar \partial_t \psi = c(-i\hbar \vec{\gamma}\nabla + mc)\psi$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left[i\hbar \underbrace{\begin{pmatrix}\gamma_0\\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}}_{=\gamma^\mu}\underbrace{\begin{pmatrix}\partial_t/c\\ \nabla\end{pmatrix}}_{=\partial_\mu} - mc\right]\psi \qquad (2)$$

Nun soll „die 3. Binomische Formel" angewendet werden, um ~~um auf~~ die Klein-Gordon-Glg. zu erhalten

$$0 = \left[-i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu - mc\right]\underbrace{\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right]\psi}_{\text{sowieso } = 0 \text{ nach (2)}}$$

$$= \left[\hbar^2\left(\sum_{\nu=0}^{3}\gamma^\nu\partial_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu\partial_\mu\right) + m^2c^2 - imc\hbar\underbrace{\left(\sum_\mu\gamma^\mu\partial_\mu - \sum_\nu\gamma^\nu\partial_\nu\right)}_{=0}\right]\psi$$

Randforderung: $[\gamma^\nu, \partial_\nu] = 0$

$$= \left[\hbar^2\left(\sum_{\nu=0}^{3}(\gamma^\nu)^2(\partial_\nu)^2 + \sum_{\mu<\nu}\underbrace{(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu)}_{=\{\gamma^\nu,\gamma^\mu\}}\partial_\nu\partial_\mu\right) + m^2c^2\right]\psi$$

Um nun die Klein-Gordon-Glg. zu erhalten, muss folgendes gelten

$$(\gamma^{i})^2 = -\mathbb{1}, \qquad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$$

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbb{1}$$

Hier sieht man, dass γ^μ kein 4-Vektor ist.

Es kann gezeigt werden, dass der μ-te Eintrag von γ^μ eine 4×4 Matrix ist.

Siehe auch:
- Spezielle Relativitätstheorie, Lorentztransformation
- Klein-Gordon-Glg.

Da jede Eintrag von γ^μ 4x4 dimensional ist, muss auch
ψ 4 Dimensionen besitzen

$\Rightarrow$ ψ ist ein Spinor.

$$\gamma^\mu: \quad \gamma^0 = \sigma_3 \otimes \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow (\gamma^0)^2 = 1\!\!1 \text{, trivial}$$

$$\gamma^i = i\sigma_2 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix} \end{pmatrix} \quad \rightarrow (\gamma^i)^2 = -1 \underbrace{(\sigma^2)^2}_{=\sigma_0} \otimes \underbrace{(\sigma^i)^2}_{=\sigma_0} = -1\!\!1$$

$$\underline{\underline{0 = \left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc1\!\!1\right)\psi}}$$

$$= \left(i\hbar \gamma_0 \partial_t / c + i\hbar \vec{\gamma} \cdot \nabla - mc\right)\psi$$

$$\Leftrightarrow i\hbar 1\!\!1 \partial_t \psi = \Big(c \frac{\hbar}{i} \underbrace{\gamma_0 \vec{\gamma}}_{\equiv \hat{\vec{\alpha}}} \nabla + mc^2 \underbrace{\gamma^0}_{\equiv \hat{\beta}}\Big)\psi$$

$$= \underbrace{\left(c \hat{\vec{\alpha}} \hat{\vec{p}} + mc^2 \hat{\beta}\right)}_{H_D}\psi \qquad \alpha_i = \sigma_1 \otimes \sigma_i$$

In Anwesenheit von Feldern (bzw. eines (4-)Potentials $A^\mu = \begin{pmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{pmatrix}$)
muss die Ableitung durch die kovariante Ableitung,
bzw. der Impuls durch die minimale Kopplung ersetzt werden

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu = D_\mu$$

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu = \pi_\mu$$

$$0 = \left(i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc1\!\!1\right)\psi$$

$$i\hbar 1\!\!1 \partial_t \psi = \left(c \hat{\vec{\alpha}}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) + mc^2 \beta + q\phi\right)\psi$$