1. Quantisierung

In QM sind Teilchen (eine Teilchensorte, bspw. e^-) nicht voneinander unterscheidbar.

Betrachtet man also Mehrteilchenprobleme (N Teilchen) bspw. Quantengase (i.e. Systeme mehrerer ~~nicht miteinander~~ freier QM-Teilchen)

so kann man <u>nicht</u> wissen, welches Teilchen in welchem Zustand ist.

Durch Messungen von bspw. der Energie kann höchstens ermittelt werden, wie viele der N Teilchen im j-ten Energiezustand sind.

Will man hier für die Wellenfunktion konkret aufschreiben als Produkt der Einteilchen-wellenfunktionen, so muss diese WF alle möglichen Permutationen berücksichtigen.

Da diese Permutationen jedoch nicht unterscheidbar sind, da sie alle dieselbe Gesamtenergie (bzw. Gesamtobservable) liefern, muss noch durch die Wurzel der Anzahl an Permutationen dividiert werden.

Bsp.: e_1 $\cdot e_2$ Besser: $\cdot e$ e

e_1 und e_2 sind ununterscheidbar
$\rightarrow$ Benennung „1" und „2" illegal!

$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$ muss gleich sein unter Vertauschung von 1, 2

$= \lambda|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle \equiv \hat{P}_{12}|\psi\rangle$ ← Vertauschungsoperator

maximal noch komplexe Phase erlaubt, da Betrag gleich sein muss: $\lambda = e^{i\eta}$

$P_{12}^2|\psi\rangle = |\psi\rangle$, zweifaches Vertauschen liefert wieder Originalzstd.

$\Rightarrow \lambda^2 = 1, \quad e^{i2\eta} = 1 \quad \Rightarrow \eta = k\pi, \quad \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$: Bosonen, $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle|\psi_1\rangle$

$\lambda = -1$: Fermionen, $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle = -|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle$

Betrachte Energie bei der ein Teilchen in $\uparrow$ Zustand und eines in $\downarrow$ Zustand ist

$\rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ (Boson)

$|\psi\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anzahl} \\ \text{Permutationen}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big(\underbrace{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}_{\text{alle Permutationen}}\Big)$ (Fermion)

, da $\langle\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle = 1$, $\langle\uparrow\downarrow|\downarrow\uparrow\rangle = 0$, $\langle\downarrow\uparrow|\downarrow\uparrow\rangle = 1$

$\Rightarrow$ Komplizierter Prozess, bereits bei 3 Teilchen kein Spaß!

$\rightarrow$ Gase haben $\mathcal{O}(10^{23})$ Teilchen, so eine Rechnung praktisch unmöglich!

$\Rightarrow$ Die Basis, in der die Teilchen explizit genannt werden ist maximal ungeschickt!!!

Bessere Basis!

- Da sowieso nur gemessen werden kann, wieviele (n_j) Teilchen im j-ten Zustand $|j\rangle$ sind, ist die Basis

  $|\underset{\substack{\uparrow \\ 1.\,\text{Zstd.}}}{n_1}, \underset{\substack{\uparrow \\ 2.\,\text{Zstd.}}}{n_2}, n_3, \dots\rangle$ besser geeignet

- Für die n_j muss gelten $\sum_j n_j = N$. Das sind die Besetzungszahlen der Zustände. n_j gibt also an, wieviele (nicht welche!) Teilchen im j-ten Zustand sind

- Die Gesamtenergie ergibt sich also zu $E = \sum_j n_j \varepsilon_j$

  mit n_j - Besetzungszahl, siehe oben

  ε_j - Energie des j-ten Zustandes