# Bosegase

$d\Omega = -SdT - pdV - N\,d\mu \quad \Rightarrow N = -\frac{d\Omega}{d\mu}\Big|_{V,T}$

$dU = TdS - pdV + \mu dN$

$S = -\frac{d\Omega}{dT}\Big|_{V,\mu}$

$U = TS = -T\frac{d\Omega}{dT}\Big|_{V,\mu} = -T\frac{d\Omega}{d\beta}\frac{d\beta}{dT}\Big|_{V,\mu} = +\frac{T}{k_B T^2}\frac{d\Omega}{d\beta}\Big|_{V,\mu}$

Für bel. Quantengas wurde gefunden:

$$Z_G = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{n_{max}} \left[\exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right]^n}_{\equiv Z_\lambda\text{, Einteilchenzustand-Zustandssumme}}$$

mit dem Einteilchenzustand ~~...~~ $\exp -\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)$, der Besetzungszahl $n$ und dem zur Energie gehörenden Index $\lambda$, der bei idealen Quantengasen für den Impuls $\vec{p}$ und Spin $S_z$ des Teilchens steht (bzw. für alle Eigenschaften, die die Energie beeinflussen!)

Bosonen besitzen eine unter Vertauschung zweier Teilchen symmetrische WF. Wenn also mehrere Bosonen am selben Ort ~~...~~ sind und denselben Spin besitzen, was sie noch ununterscheidbarer macht, als sie das sowieso schon sind, macht das nichts, da die WF sich unter Vertauschung nicht ändert:

$$P_{ij}|\psi\rangle = P_{ij}|\ldots, \uparrow\vec{r}_i, \uparrow\vec{r}_j, \ldots\rangle = |\ldots, \uparrow\vec{r}, \ldots, \uparrow\vec{r}, \ldots\rangle = |\psi\rangle$$

Deshalb sollte es keine Beschränkung geben, wie viele Bosonen sich ~~am~~ im selben Zustand ~~...~~ aufhalten
(Da es ~~...~~ für die WF egal ist, welches Teilchen an welchem Platz betrachtet wird)

$\Rightarrow n_{max} = \infty$

Achtung: dieser Schritt darf nur gemacht werden, wenn $\exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu) < 1 \iff \varepsilon_\lambda - \mu > 0 \iff \mu < \min\{\varepsilon_\lambda\}$ ($\beta > 0$)

$$Z_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right]^n = \frac{1}{1-\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)]}$$

Für Bosonen ist das chemische Potential also nach oben hin durch das niedrigste Energieniveau $\varepsilon_\lambda$ ~~...~~ beschränkt!

$$\Rightarrow \Omega = -k_B T \ln Z_G = -k_B T \sum_\lambda \ln Z_\lambda = +k_B T \sum_\lambda \ln\left[1 - \exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right]$$

Rechnen mit $\Omega$:

- Mittlere Teilchenzahl im System:

$$\langle N\rangle = -\frac{d\Omega}{d\mu}\Big|_{V,T} = -\frac{1}{\beta}\sum_\lambda \frac{-1}{1-\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)]}\,\beta\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)]$$

$$= \sum_\lambda \frac{1}{\exp\beta(\varepsilon_\lambda - \mu) - 1}$$

$$\equiv \sum_\lambda n_B(\varepsilon_\lambda) \quad ; \quad n_B(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Auch hier sieht man, dass $\varepsilon > \mu$ gelten muss, da sonst ~~...~~ Teilchenzahl negativ werden kann

Alternativ: Wahrscheinlichkeit, dass Einteilchenzustand $\lambda$ $n_\lambda$-fach besetzt ist:

$$W_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda}\left[\exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right]^{n_\lambda}$$

$\Rightarrow$ Mittlere Besetzungszahl des Einteilchenzustands $\lambda$

$$\langle n_\lambda\rangle = \sum_{n_\lambda} n_\lambda W_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda}\underbrace{\sum_{n_\lambda} n_\lambda \big[\exp \underbrace{-\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}_{\equiv x}\big]^{n_\lambda}}_{= -\frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}}, \text{ da } Z_\lambda = \sum_{n_\lambda} \exp -x n_\lambda \Rightarrow -\frac{\partial Z_\lambda}{\partial x} = +\sum_{n_\lambda} n_\lambda \exp -x n_\lambda$$

$$= -\frac{1}{Z_\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1-e^{-x}} = -\frac{1}{Z_\lambda}\cdot Z_\lambda^2\,(-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}-1} = n_B(\varepsilon_\lambda)$$

$\Rightarrow$ Mittlere Teilchenzahl: Summe ~~...~~ der mittleren Besetzungszahlen über alle Einteilchenzustände

$$\langle N\rangle = \sum_\lambda \langle n_\lambda\rangle = \sum_\lambda n_B(\varepsilon_\lambda)$$

- Mittlere Energie (innere Energie) siehe Rückseite

Siehe auch: – großkanonisches Potential § Andere Kurve – erzeugende Funktion

- mittlere Energie Bosegas:

Im großkan. Ensemble ist die erzeugende Funktion für die innere Energie durch folgendes geg.:

$$U = \langle E \rangle = -\partial_\beta \ln Z_q$$

$$= +\partial_\beta \sum_\lambda \ln\left[1 - \exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right] = \sum_\lambda \frac{\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]}{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]} \left(\varepsilon_\lambda \underbrace{-\mu - \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}}_{=0}\right)$$

$$= -\frac{\mu}{\beta}$$

$$= \sum_\lambda \frac{1}{\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)] - 1} \varepsilon_\lambda = \sum_\lambda n_B(\varepsilon_\lambda)\, \varepsilon_\lambda$$

Alternativ:

Die mittlere Energie eines Einteilchenzustands ist durch das Produkt aus der Energie dieses Zustands $\varepsilon_\lambda$ und der mittleren Besetzungszahl gegeben

$$\langle \varepsilon_\lambda \rangle = \varepsilon_\lambda \cdot \langle n_\lambda \rangle$$

Der Erwartungswert der inneren Energie ist also die Summe über die Erwartungswerte aller Einteilchenzustände

$$U = \langle E \rangle = \sum_\lambda \langle \varepsilon_\lambda \rangle = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \cdot \langle n_\lambda \rangle = \sum_\lambda n_B(\varepsilon_\lambda)\, \varepsilon_\lambda$$