Fermigas

Für bel. Quantengas wurde folgende großkanonische Zustandssumme gefunden:

$$Z_G = \prod_\lambda \sum_{n=0}^{n_{max}} \left[\exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right]^n$$

mit dem Einteilchenzustand $\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]$, der Besetzungszahl n und der Einteilchenzustand-Zustandssumme $Z_\lambda = \sum_{n=0}^{n_{max}} [\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]]^n$

wobei λ den Einteilchen-Zustand vollständig charakterisiert!

Bsp.: ~~Frei~~ ideales Quantengas: $\lambda = \{\vec{p}, s_z\}$

Für Fermionen ist $n_{max} = 1$, somit ist

- $Z_\lambda = \sum_{n=0}^{1} \left[\exp -\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)\right]^n = 1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]$

- $Z_G = \prod_\lambda \left(1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]\right)$

- $\Omega = -k_B T \ln Z_G = -\frac{1}{\beta} \sum_\lambda \ln\left(1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]\right)$

- $\langle N \rangle = -\left.\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \frac{1}{\beta} \sum_\lambda \frac{\beta \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]}{1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]} = \sum_\lambda \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1}$; $n_F(\varepsilon) \equiv \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$

  $\equiv \sum_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda)$

Beachte: im Gegensatz zu Bosonen gibt es hier keine ~~Arbeit~~ Beschränkung des chem. Potentials!

Alternativ: mittlere Besetzung des Einteilchenzustands:

Wsk für n-fache Besetzung: $W_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda} \cdot [\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]]^n$

→ Mittlere Besetzung: $\langle n_\lambda \rangle = \sum_{n_\lambda} W_\lambda n_\lambda = 0 + 1 \cdot \frac{\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]}{1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]} = n_F(\varepsilon_\lambda)$

→ Mittlere Teilchenzahl = Summe über alle Einteilchenzustände:

$\langle N \rangle = \sum_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda)$

- $U = \langle E \rangle = -\partial_\beta \ln Z_G = -\partial_\beta \sum_\lambda \ln\left(1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]\right) = \sum_\lambda \frac{\exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]\,(\varepsilon_\lambda - \mu - \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta})}{1 + \exp[-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)]}$, $\frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -\frac{\mu}{\beta}$

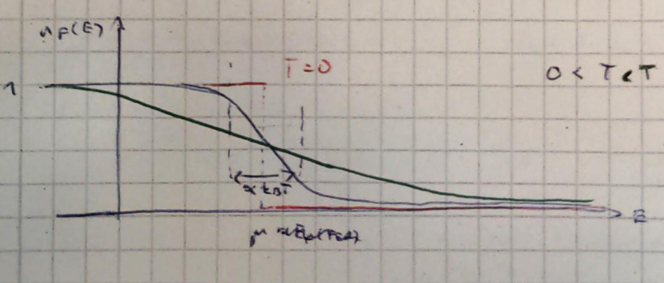
  $= \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1} = \sum_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda)\, \varepsilon_\lambda$

Alternativ: mittlere Energie Einteilchenzustand = Energie desselben · mittlere Besetzung

→ $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = \varepsilon_\lambda \langle n_\lambda \rangle = \varepsilon_\lambda n_F(\varepsilon_\lambda)$

Innere Energie = Summe über mittlere Energien

$U = \sum_\lambda \langle \varepsilon_\lambda \rangle = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \cdot n_F(\varepsilon_\lambda)$



Siehe auch – großkanonisches Potential § Ω, N nahe, erzeugende Funktion
– Fermi-Dirac Statistik