Eichabhängigkeit der Berryphase

Erinnerung: SG invariant unter Eichtrafo:

$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \quad , \varphi \to \varphi' = \varphi - \partial_t \chi \, , \quad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = e^{i\chi}|\psi\rangle$

mit skalarer Funktion $\chi(\vec{r},t)$

Betrachte „Zeitentwicklungsoperator" der instantanen Basis in neuer Eichung:

$$|n'(\vec{R}(t))\rangle = e^{-i\chi(\vec{R})}|n(\vec{R}(t))\rangle \qquad |n_0'\rangle = e^{-i\chi(\vec{R}(t_0))}|n_0\rangle \;, \; \vec{R}_0 = \vec{R}(t_0)$$

$$\leadsto \Omega(t_0,t) = \sum_n |n_0\rangle\langle n(\vec{R}(t))| e^{+i\chi(\vec{R})}$$

verschwindet, da H nur von $\vec{R}$ abhängt und nicht von $\partial_{\vec{R}}, \partial_t$

$$H_0' = \Omega H \Omega^{-1} = \sum_{n,m} e^{-i\chi(\vec{R}_0)}|n_0\rangle\langle n(\vec{R}(t))| e^{i\chi(\vec{R})} H e^{-i\chi(\vec{R})}|m(\vec{R}(t))\rangle\langle m_0| e^{i\chi(\vec{R}_0)}$$

$$= \sum \underbrace{e^{-i\chi(\vec{R}_0)} e^{+i\chi(\vec{R}_0)}}_{=1} |n_0\rangle\langle n(\vec{R}(t))| \underbrace{e^{+i\chi(\vec{R})} e^{-i\chi(\vec{R})}}_{=1} H |m(\vec{R}(t))\rangle\langle m_0|$$

$$= H_0$$

$$V' = \sum_{m,n} i\hbar\, e^{-i\chi(\vec{R}_0)}|m_0\rangle \dot{\vec{R}}(t)\left(\nabla_{\vec{R}}\langle m(\vec{R}(t))| e^{i\chi(\vec{R})}\right) e^{-i\chi(\vec{R})}|n(\vec{R}(t))\rangle\langle n_0| e^{i\chi(\vec{R}_0)}$$

$$= \sum_{m,n} i\hbar |m_0\rangle \dot{\vec{R}}(t)\left(\nabla_{\vec{R}}\langle m(\vec{R}(t))|\right) \underbrace{e^{i\chi(\vec{R})} e^{-i\chi(\vec{R})}}_{=1} |n(\vec{R}(t))\rangle\langle n_0| \underbrace{e^{i\chi(\vec{R}_0)} e^{-i\chi(\vec{R}_0)}}_{=1}$$

$$+ \sum_{m,n} i\hbar |m_0\rangle \dot{\vec{R}}(t)\left(+i\nabla_{\vec{R}}\chi(\vec{R})\right) \underbrace{\langle m(\vec{R}(t))|n(\vec{R}(t))\rangle}_{=\delta_{mn}}\langle n_0|$$

$$= V - \sum_m \hbar\, \dot{\vec{R}}(t)\left(\nabla_{\vec{R}}\chi(\vec{R})\right)|m_0\rangle\langle m_0|$$

$$\Rightarrow E_n'^{(1)} = V'_{nn} = V_{nn} - \hbar\left(\nabla_{\vec{R}}\chi(\vec{R})\right)\dot{\vec{R}}(t)$$

$$\Rightarrow |\psi_n'(t)\rangle = c'(t)\,|n_0\rangle$$

Transformiert unter Eichtrafo wie ein Vektorpotential (also mit $\nabla\chi$)

$$\text{mit} \quad c'(t) = \exp\Bigg(i\Bigg(\underbrace{\int_{t_0}^{t}\frac{E_n(\vec{R}(t'))}{-\hbar}\,dt'}_{=\varphi_0'(t)=\varphi_0(t)} + \overbrace{\underbrace{\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}(t)}\left(-i\left(\nabla_{\vec{R}'}\langle n(\vec{R}')|\right)|n(\vec{R}')\rangle + \nabla_{\vec{R}'}\chi(\vec{R}')\right)d\vec{R}'}_{\varphi_B'(t)}}\Bigg)\Bigg)$$

$\leadsto$ Dynamische Phase Eichinvariant

$$\Rightarrow \varphi_B'(t) = \varphi_B(t) + \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}(t)} \nabla_{\vec{R}'}\chi(\vec{R}')\,d\vec{R}' = \underline{\underline{\varphi_B(t) + \chi(\vec{R}(t)) - \chi(\vec{R}_0)}}$$

Die Berryphase ist nicht Eichinvariant und somit ~~nicht~~ meistens auch nicht beobachtbar

→ Für Kurven Γ im Parameterraum $\vec{R}$, ist die Berryphase nur dann beobachtbar, wenn Γ eine geschlossene Kurve ist.

→ Die Berryphase ist nur dadurch beobachtbar, wie oft Γ ~~in jedem Punkt des Parameterraums~~ durchlaufen wird

~~Beispiele~~:
weitere Eigenschaften:

- wenn $|n\rangle$ reell gewählt werden kann, ist $\varphi_n = 0$, da $\varphi_n \propto \langle n|\dot{n}\rangle\, d\vec{R}$; wenn $|n\rangle$ reell kann $\langle n|\dot{n}\rangle$ nicht $\in i\mathbb{R}$ sein
- für 1D-Parameterraum verschwindet Berryphase, da Γ dann fast ~~~~ zeigt ⇒ $\oint i\langle n|\nabla_{\vec{R}}|n\rangle d\vec{R} = 0$ (Hinweg = Rückweg)
- Aharonov Bohm Effekt kommt von Berryphase

Siehe auch Aharonov-Bohm Effekt