

# Die Energie - Zeit - Unschärfe

Problem: Es gibt in der Standard - QM keinen Zeitmessungsoperator

Lösung: Betrachte Zeitentwicklung eines Zustandes  
 ↳ Also bspw. wie lange der Zstd. "lebt"

Der Zustand sei durch den Operator  $\hat{A}$  und die WF  $|\psi\rangle$  beschrieben

$$\text{Var}(\hat{H}) \text{Var}(\hat{A}) \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle|^2$$

Achtung: gilt nur für  $\hat{H}, \hat{A} \neq \hat{H}(t), \hat{A}(t)$

$$= \frac{1}{4} \left| \hbar i \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_E \cdot \frac{\sigma_A}{\left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Standardabweichung der Energie

Standardabweichung der Observable  $A$   
 zeitl. Änderung der Observable  $A$

⇒ Je schärfer die Observable gemessen wird ( $\sigma_A$  klein) und je stärker sie sich ändert, desto genauer weiß man Bescheid, zu welchem Zeitpunkt im Leben von  $A$  man sich befindet, wenn man  $A$  misst.

Alternative Betrachtung:

$$\sigma_E \cdot \frac{\sigma_A}{\left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|} \approx \frac{\sigma_A}{\left| \langle \hat{A}(t_0) \rangle - \langle \hat{A}(t_0 + \Delta t) \rangle \right|} \Delta t$$

Definiere nun  $\sigma_E$  als  $\Delta t \left| \langle \hat{A}(t_0) \rangle - \langle \hat{A}(t_0 + \Delta t) \rangle \right|$

Also ist die Zeitunschärfe die Zeit, in der sich der Wert der Observable  $\hat{A}$  braucht, um sich um den Betrag ihrer Unsicherheit zu ändern

→ Für Zeiten (bzw. Zeitspannen)  $\Delta t$  kann also keine so genaue Aussage mehr über die Observable gemacht werden

Intuition: • Messungen besitzen in der Praxis eher eine relative Messgenauigkeit als eine absolute  
 →  $\sigma_E$  ist eine Abschätzung für die Energie, die das System hat

• Um einen Zustand zu ändern braucht ein System Energie (zumindest in Abhängigkeit)

↳ Ein System kann sich **besser** (also schneller) ändern, je mehr Energie es hat

• Wenn man also von einem Zustand  $A$  auf die Zeit schließen möchte, sollte diese recht kurz lebendig sein, sich also schnell verändern und somit viel Energie besitzen, was zu einer hohen absoluten Unsicherheit auf die Energie führt

Siehe auch: (Zeitentwicklung) Unbestimmtheitsrelation