Von Neumann Gleichung

Motivation: Durch Lösen der Schrödingergleichung erhält man die Zeitentwicklung der Zustände (zumindest, wenn $H \neq H(t)$).

Suche die Zeitabhängigkeit des Dichteoperators unter Annahme, dass die w_n zeitlich konstant sind.

(Diese Annahme macht deshalb Sinn, da die Anzahl an möglichen Zuständen gleich bleiben sollte, da nicht mit der Zeit plötzlich der Phasenraum größer/kleiner wird. (Satz v. Liouville)
Somit sollte jedes Teilvolumen des Phasenraums seine Größe nicht ändern, ebensowenig wie das Volumen, weshalb $W(t) = \frac{V_1(t)}{V(t)} = \frac{V_1}{V} = W$)

Nutze die zeitabh. Schrödingergl. $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H\psi$, $-i\hbar\partial_t\langle\psi| = \langle\psi|H$

$$i\hbar\partial_t\rho = i\hbar\partial_t\sum_n w_n|n\rangle\langle n| \overset{\frac{\partial w_n}{\partial t}=0}{=} \sum_n w_n\left(i\hbar\partial_t|n\rangle\langle n| + |n\rangle i\hbar\partial_t\langle n|\right)$$

$$= \sum_n w_n\left(H|n\rangle\langle n| - |n\rangle\langle n|H\right) = H\sum_n w_n|n\rangle\langle n| - \sum_n w_n|n\rangle\langle n|H$$

$$= [H, \rho] \qquad \text{(von Neumann-Glg)}$$

Aus der von Neumann Glg folgt bspw.

$$i\hbar\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-k_B \operatorname{Tr}\rho\ln\rho\right) = -k_B\operatorname{Tr}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\ln\rho + \overbrace{\rho\frac{1}{\rho}}^{=1}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

$$= -k_B\operatorname{Tr}\left([H,\rho](\ln\rho+1)\right) = -k_B\left[\operatorname{Tr}\left(H\rho(\ln\rho+1)\right) - \operatorname{Tr}\left(\rho H(\ln\rho+1)\right)\right]$$

$$\overset{[\rho,\ln\rho+1]=0,\ \operatorname{Tr}[H\rho]=\operatorname{Tr}[\rho H]}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Unter Annahme der von Neumann Glg (also v.a. unter der Annahme $\frac{\partial w_n}{\partial t} = 0$!) ist die Entropie erhalten.