Forminvarianz der Dirac-Glg. unter LT

Bekannt:

- Dirac-Gl.: $0 = \left(i\hbar\, \gamma^\mu D_\mu(x) - mc\,\mathbb{1}\right)\Psi(x)$ mit x-4-Vektor
- Lorentz-Trafo:
  - $x'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu x^\nu$, $x'_\mu = \Omega_\mu{}^\nu x_\nu$
  - $\delta^\mu{}_\nu = \Omega_\alpha{}^\mu \Omega^\alpha{}_\nu \Rightarrow (\Omega^\alpha{}_\nu)^{-1} = \Omega_\alpha{}^\mu$

$$\Rightarrow x^\mu = x'^\nu \Omega_\nu{}^\mu \quad , \quad D_\mu(x) = D'_\nu(x')\,\Omega^\nu{}_\mu$$

LT (inverse) einsetzen liefert:

$$0 = \Big(i\hbar\, \underbrace{\gamma^\mu \overbrace{D'_\nu(x')\,\Omega^\nu{}_\mu}^{=D_\mu(x)}}_{=\underbrace{\Omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu}_{\equiv \gamma'^\nu} D'_\nu(x')} - mc\,\mathbb{1}\Big)\Psi(\underbrace{x'^\alpha \Omega_\alpha{}^\eta}_{=x^\eta})$$

$$= \left(i\hbar\, \gamma'^\nu D'_\nu(x') - mc\,\mathbb{1}\right)\Psi(x'^\alpha \Omega_\alpha{}^\eta)$$

Achtung: jetzt muss nach Lorentz Boost γ transformiert werden

→ Form der Glg ändert sich

Statt dessen: Suche 4×4 Matrix (aus dem Hilbertraum der Spinoren) $S(\Omega)$ für die gilt:

- $\gamma'^\nu = \Omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\nu S$
- $\det S = 1$

S muss für jede LT Ω neu berechnet werden

Spinoren
4-Vektoren

$$\underset{\Omega}{(4\times4)}\,\underset{\gamma^\mu}{\begin{pmatrix}(4\times4)\\(4\times4)\\(4\times4)\\(4\times4)\end{pmatrix}} = \underset{S^{-1}}{(4\times4)}\,\underset{\gamma}{\begin{pmatrix}(4\times4)\\(4\times4)\\(4\times4)\\(4\times4)\end{pmatrix}}\,\underset{S}{(4\times4)}$$

Wenn man S gefunden hat gilt:

$$0 = \left(i\hbar\, S^{-1}(\Omega)\gamma^\nu \underset{\text{vertauschen, da andere Hilberträume}}{S(\Omega) D'_\nu(x')} - mc\,\mathbb{1}\right)\Psi(\underbrace{\Omega^{-1}x'}_{=x}) \qquad \Big|\cdot S(\Omega) \text{ von links}$$

$$0 = \left(i\hbar\, \gamma^\nu D'_\nu(x') - mc\,\mathbb{1}\right)\underbrace{S(\Omega)\Psi(\Omega^{-1}x')}_{=\Psi'(x')}$$