Drehimpulse in der Quantenmechanik

Als Drehimpulse werden hermitesche Operatoren bezeichnet, die die folgende ~~Drehimpulsalgebra~~ Kommutatorrelation erfüllen:

$$[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\hbar\, \varepsilon_{klm}\, \hat{J}_m \qquad (1)$$

Eigenschaften:

- (1)
- $$[\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^2] = [\hat{J}_k, \hat{J}_l \hat{J}_l] = \hat{J}_l [\hat{J}_k, \hat{J}_l] + [\hat{J}_k, \hat{J}_l]\hat{J}_l$$
  $$= i\hbar \underbrace{\varepsilon_{klm}}_{\text{antisymmetrisch}} \underbrace{(\hat{J}_l \hat{J}_m + \hat{J}_m \hat{J}_l)}_{\text{symmetrisch unter Vertauschung von } l,m}$$
  $$= 0$$
- $J_k^\dagger = J_k$ (laut Def.)

Def. Leiteroperatoren: $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y$ (obdA.)

$$\rightarrow \hat{J}_\pm^\dagger = \hat{J}_x^\dagger \pm (i\hat{J}_y)^\dagger = \hat{J}_x \mp i \hat{J}_y = \hat{J}_\mp$$

$$\rightarrow [\hat{J}_\pm, \hat{J}_z] = [\hat{J}_x, \hat{J}_z] \pm i [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = -i\hbar \hat{J}_y \underbrace{\pm i}_{=\mp} i\hbar \hat{J}_x = \mp \hbar \hat{J}_\pm$$

$$\rightarrow [\hat{J}_\pm, \hat{\vec{J}}^2] = 0 \quad \text{(trivial, aus } [\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^2] = 0\text{)}$$

$$\rightarrow [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] + i[\hat{J}_y, \hat{J}_x] = 2\hbar \hat{J}_z$$

$$\rightarrow \hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_z^2 \underbrace{+ i \hat{J}_x \hat{J}_y - i \hat{J}_y \hat{J}_x}_{= i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = -\hbar \hat{J}_z}$$
$$= \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z$$
$$= \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z$$

Eigenwerte: Betrachte Basis $|m\rangle$, in der $\hat{J}_z$ diagonal

$$\hat{J}_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle$$

Wie wirkt $J_\pm$ in $|m\rangle$?:

$$\hat{J}_z \hat{J}_\pm |m\rangle = \hat{J}_\pm \hat{J}_z |m\rangle + [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] |m\rangle = m\hbar \hat{J}_\pm |m\rangle \pm \hbar \hat{J}_\pm |m\rangle = (m \pm 1)\hbar \hat{J}_\pm |m\rangle$$

$$\rightarrow \Phi \equiv \hat{J}_\pm |m\rangle = \text{[illegible]}\ \alpha_m^\pm \hbar |m \pm 1\rangle$$

$\hat{=}$ „Eigenwert“

Da $[\hat{J}_z, \hat{\vec{J}}^2] = 0$ kann $|m\rangle$ so gewählt sein, dass $\hat{\vec{J}}^2 |m\rangle = \hbar^2 k_m^2 |m\rangle$ gilt:

$$\hat{J}^2 |m\pm1\rangle = \hbar^2 k_{m\pm1}^2 |m\pm1\rangle = \hat{J}_\pm \hat{J}^2 |m\rangle = \hbar^2 k_m^2 J_\pm|m\rangle = \hbar^2 k_m^2 |m\pm1\rangle$$

$\Rightarrow \quad k_{m\pm1}^2 = k_m^2 \quad \rightarrow k$ unabhängig von m!

→ Charakterisiere Zstd man mit $|k,m\rangle$

Abschätzung k^2: $\frac{1}{\hbar^2}\langle km|\hat{J}^2|km\rangle = k^2 = \frac{1}{\hbar^2}\langle k,m|(\hat J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)|k,m\rangle$

$$= \underbrace{\frac{\langle k,m|(\hat J_x^2+J_y^2)|k,m\rangle}{\hbar^2}}_{\geq 0,\ \text{da}\ \hat J = \hat J^\dagger} + \cancel{k}\, m^2$$

$$\geq m^2$$

Wählt man $k>0$ folgt $-k\le m\le k$, m ist also beschränkt!

→ $\hat J_+|k,m_{max}\rangle = \hat J_-|k,m_{min}\rangle = 0$

Außerdem: $\hat J^2|k,m_{max}\rangle = \hat J_+\hat J_-|k,m_{max}\rangle + \hat J_z^2|k,m_{max}\rangle - \hbar \hat J_z|k,m_{max}\rangle$

$\hat J_-\hat J_+|k,m_{max}\rangle + 2\hbar\hat J_z|k,m_{max}\rangle$ (mit $\hat J_-\hat J_+|k,m_{max}\rangle = 0$)

$$= \hbar\alpha^-_{m_{max}}\alpha^+_{m_{max}-1}|k,m_{max}\rangle + \hbar^2 m_{max}^2|k,m_{max}\rangle - \hbar^2 m_{max}|k,m_{max}\rangle$$

$$= \hbar^2\Big[\underbrace{\alpha^-_{m_{max}}\alpha^+_{m_{max}-1} + m_{max}(m_{max}-1)}_{=k^2}\Big]|k,m_{max}\rangle$$

$$= \hbar^2(m_{max}+1)m_{max}|k,m_{max}\rangle$$

$$\hat J^2|k,m_{min}\rangle = \underbrace{\hat J_+\hat J_-|k,m_{min}\rangle}_{=0} + \hat J_z^2|k,m_{min}\rangle - \hbar\hat J_z|k,m_{min}\rangle$$

$$= \hbar^2 \underbrace{m_{min}(m_{min}-1)}_{=k^2}|k,m_{min}\rangle$$

$$\left(= \hat J_-\hat J_+|k,m_{min}\rangle - 2\hbar\hat J_z|k,m_{min}\rangle + \hat J_z^2|k,m_{min}\rangle - \hbar\hat J_z|k,m_{min}\rangle = \hbar^2(\alpha^+_{m_{min}}\alpha^-_{m_{min}+1} + m_{min}(m_{min}-3))|k,m_{min}\rangle\right)$$

$\Rightarrow \quad m_{max}(m_{max}+1) = m_{min}(m_{min}-1)$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{m_{min} = -m_{max}}}$ oder $m_{min} = m_{max}+1$ ↯ $m_{min}<m_{max}$

Def: $j = m_{max} \quad \rightarrow \quad -j\le m\le j, \quad j\in \frac{\mathbb N}{2}$ (siehe Begründung später)

$k^2 = j(j+1) \quad \rightarrow \quad \hat J^2|k,m_{max}\rangle = \hbar^2 j(j+1)|k,m_{max}\rangle$

→ j besser geeignet als k, um Zstd zu beschreiben: Def.: $|k,m\rangle \equiv |j,m\rangle$

außerdem gefunden: $j(j+1) = \alpha^-_{m_{max}}\alpha^+_{m_{max}-1} + j(j-1) \Leftrightarrow 2j = \alpha^-_{m_{max}}\alpha^+_{m_{max}-1}$

$$-j(-j+1) = \alpha^+_{m_{min}}\alpha^-_{m_{min}+1} - j(-j-3)$$

$$\Leftrightarrow 2j = \alpha^+_{m_{min}}\alpha^-_{m_{min}+1}$$

$$\alpha^-_j\,\alpha^+_{j-1} = \alpha^+_{-j}\,\alpha^-_{-(j+1)}$$

$\hat J_\pm|j,m\rangle = \alpha^\pm_m|j,m\pm1\rangle \quad , \quad \hat J_\pm^\dagger = J_\mp$

$$\hbar^2|\alpha^\pm_m|^2 = \langle j,m|\hat J_\mp\hat J_\pm|j,m\rangle = \langle j,m|(\hat J^2 - \hat J_z^2 \mp \hbar\hat J_z)|j,m\rangle$$

$$= \hbar^2(j(j+1) - m^2 \mp m) = \hbar^2(j(j+1) - m(m\pm1))$$

$\Rightarrow |\alpha^\pm_m| = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\quad , \quad \hat J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|j,m\pm1\rangle$

Erlaubte Werte für j: man muss von $-j$ bis j in 1er Sprüngen kommen, da Sprünge von m um 1, $-j\le m\le j$, $m=j$ muss erreicht werden $\Rightarrow j\in\frac{\mathbb N}{2}$