Bose Einstein Kondensation

Bei der Berechnung der großkanonischen Zustandssumme eines Bosegases findet man folgendes:

$$Z_G = \prod_\lambda Z_\lambda \quad ; \quad Z_\lambda = \frac{1}{-e^{-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1}$$ mit der Beschränkung / Bedingung

$$\mu < \min\{\varepsilon_\lambda\} \equiv \varepsilon_{min}$$

Daraus ergibt sich die Teilchenzahl zu: $\left(\Omega = \frac{1}{\beta} \sum_\lambda \ln\left[1 - \exp(-\beta(\varepsilon_\lambda - \mu))\right] \right)$

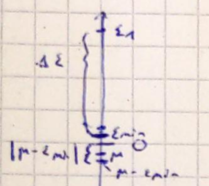
$$\langle N \rangle = \sum_\lambda n_B(\varepsilon_\lambda) \quad \text{mit} \quad n_B(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

Wähle oBdA $\varepsilon_{min} = 0$ (ansonsten def. $\tilde{\mu} = \mu - \varepsilon_{min}$, $\tilde{\varepsilon}_\lambda = \varepsilon_\lambda - \varepsilon_{min}$)
und betrachte die Konsequenzen der Beschränkung des chem. Potentials:

Erinnerung: großkanonisch $\to$ $d\Omega = -SdT - pdV - N d\mu$, $\Omega(T, V, \mu)$ aber μ beschränkt
$\Rightarrow$ großkanonisch eigentlich ungeeignet, aber solange TD eines und N-fest betrachtet wird zum rechnen okay.

Um $\langle N \rangle$ zu berechnen, lohnt es sich die Summe in ein Integral zu überführen.
~~Allerdings~~ dies geht jedoch nur, wenn die Bosefunktion sich von ε_λ zu $\varepsilon_{\lambda+1}$ nicht allzu stark ändert!

Betrachte $e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} \equiv z e^{\beta \varepsilon_\lambda}$! (z



Für ε_{min} und $z \to 1^-$ fällt auf, dass $\underbrace{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{min}}}_{=1} = 1$ und somit $n_B \to \infty$
← linksseitiger Limes!

Falls $\varepsilon_1 - \varepsilon_{min} = \Delta\varepsilon \gg |\mu - \varepsilon_{min}|$ ist also $n_B(\varepsilon_{min}) \gg n_B(\varepsilon_1)$
und $n_B(\varepsilon_{\lambda \neq min})$

Somit sollte dieser Fall gesondert betrachtet werden!

→ Wenn chem. Pot. sehr viel näher an ε_{min} als an allen anderen ε_λ, so muss 1. Term gesondert betrachtet werden

$$\Rightarrow \langle N \rangle = n_B(\varepsilon_{min}) + \underbrace{\sum_{\lambda \neq min} n_B(\varepsilon_{min})}_{\to \int_0^\infty n_B(\varepsilon) \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon}$$

Wenn $\Delta\varepsilon \gg |\mu - \varepsilon_{min}|$ ist die Zustandsdichte bei ε_{min} sehr viel größer als überall sonst („makroskopisch")
Dann ist ε_{min} sehr stark entartet, bzw. besetzt

$$= \frac{1}{\underbrace{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{min}}}_{=1} - 1} + \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^{-1} - 1}}_{\equiv N_0} + \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= N_0 + \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$$

Im „kanonischen Mindset" ist μ jedoch nicht direkt kontrolliert, weshalb die Abschätzung $\Delta\varepsilon \gg |\mu - \varepsilon_{min}|$ nichts bringt. Da dann jedoch die Teilchenzahl N beliebig kontrolliert werden kann, wird N_0 erst dann makroskopisch relevant, wenn das Integral konvergiert.
Bis dahin haben alle Teilchen noch ausreichend Platz im Integral, sobald dieses jedoch konvergiert muss jedes neu hinzukommende Teilchen in N_0 aufgenommen werden.
Da die Definition von N_0 im kanonischen gedanken „der Rest der Teilchen, welche nicht ins Integral passt" ist, folgt $N_0 = N - \int_0^\infty n_B(\varepsilon) \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$.
Da im Fall, dass N_0 makroskopisch ist bekannt ist, dass $\mu \to 0$ geht, folgt $z^{-1} = 1 - \beta\mu$

$N_0 \approx -\frac{1}{\beta\mu}$

$\left(\cancel{\Rightarrow \mu = \frac{k_B T}{\int_0^\infty n_B(\varepsilon) \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon - N}} \right)$