Die Heisenberg'sche ~~Ungleichung~~ Unbestimmtheitsrelation

Die Schwartz'sche Ungleichung: $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ (1)

Beweis: $|\gamma\rangle \equiv |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle \quad , \quad \langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$

$$0 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle + \underbrace{\lambda\langle\alpha|\beta\rangle + \lambda^*\langle\beta|\alpha\rangle}_{=2\,\mathrm{Re}\{\lambda\langle\alpha|\beta\rangle\}} + |\lambda|^2\langle\beta|\beta\rangle$$

Wähle $\lambda = -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle^2} = \frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\langle\beta|\beta\rangle^2}$

$$\mathrm{Re}\{\lambda\langle\alpha|\beta\rangle\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\right\} = -\frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\langle\beta|\beta\rangle}$$

$$0 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle - 2\frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\langle\beta|\beta\rangle} + \frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\langle\beta|\beta\rangle^2}\langle\beta|\beta\rangle$$

$$\Leftrightarrow |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$$

Motivation: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle\vec{a},\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

Die Varianz eines Messwerts

$\hat{O}$ hermitesch, da Messwert

$$\mathrm{Var}\langle\hat{O}\rangle = \langle(\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)^2\rangle = \langle\psi|(\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)^\dagger(\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)|\psi\rangle = \langle(\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)\psi|\underbrace{(\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)\psi\rangle}_{=|\alpha\rangle}$$

$$\mathrm{Var}\langle\hat{P}\rangle = \langle(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle)\psi|(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle)\psi\rangle = \langle\beta|\beta\rangle$$

Einsetzen liefert: $\mathrm{Var}\langle\hat{O}\rangle\mathrm{Var}\langle\hat{P}\rangle \geq |\underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{\equiv z}|^2$, komplexe Zahl

$$|z|^2 = |\mathrm{Re}\{z\}|^2 + |\mathrm{Im}\{z\}|^2 \geq |\mathrm{Im}\{z\}|^2 = \left|\frac{1}{2i}(z-z^*)\right|^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\langle\hat{O}\rangle\mathrm{Var}\langle\hat{P}\rangle \geq \left|\frac{1}{2i}(\underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle})\right|^2$$

$$= \langle\psi|\left((\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle) - (\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle)(\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle)\right)|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|(\hat{O}\hat{P}-\hat{P}\hat{O})|\psi\rangle \underbrace{- \langle\hat{O}\rangle\langle\hat{P}\rangle - \langle\hat{O}\rangle\langle\hat{P}\rangle + \langle\hat{O}\rangle\langle\hat{P}\rangle + \langle\hat{P}\rangle\langle\hat{O}\rangle + \langle\hat{P}\rangle\langle\hat{O}\rangle - \langle\hat{P}\rangle\langle\hat{O}\rangle}_{=0}$$

$$= \langle\psi|[\hat{O},\hat{P}]|\psi\rangle$$

$$\mathrm{Var}\langle\hat{O}\rangle\mathrm{Var}\langle\hat{P}\rangle = \sigma_O^2\sigma_P^2 \geq \frac{1}{4}|\langle\psi|[\hat{O},\hat{P}]|\psi\rangle|^2$$

Physikalische Größen, die zu nicht kommutierenden Operatoren gehören, können nicht gleichzeitig scharf gemessen werden

Bsp: $\sigma_{r_i}^2\sigma_{p_j}^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[r_i,p_j]\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle i\hbar\delta_{ij}\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{4}\delta_{ij}$

$$\Rightarrow \sigma_x\sigma_{p_x} = \sigma_y\sigma_{p_y} = \sigma_z\sigma_{p_z} = \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_x\sigma_{p_y} = \ldots = 0$$

Siehe auch: Kommutatoren