Landauniveaus (algebraische, Eichinvariante Lösung, gut um Oszillatoreigenschaft zu zeigen)

<u>Annahme:</u> $\vec{A} \neq 0$, $\Phi = 0$, Teilchen mit Spin
$\vec{A}$ so, dass $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$

Bemerkung: Hier wurde die in der sonstigen Relativistik übliche minimale Kopplung verwendet. Stattdessen könnte auch $q/c \to q$ ersetzt werden, um in SI-Einheiten zu rechnen

$\to \quad H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m}\sigma_0 - \frac{q}{mc}\vec{B}\cdot\vec{S}$

Da $\vec{B} = B e_z$: $\vec{A}_z$ o.d.A. $= 0$, $\vec{\pi} = \begin{pmatrix} p_x - \frac{q}{c}A_x \\ p_y - \frac{q}{c}A_y \\ p_z \end{pmatrix}$

$\to \quad H = \frac{1}{2m}(\underbrace{\pi_x^2 + \pi_y^2})\sigma_0 + \frac{p_z^2}{2m}\sigma_0 - \frac{\hbar q}{2mc}B\sigma_z$

<u>Idee:</u> Verwende 3. Bin. Formel: $\pi_x^2 + \pi_y^2 = \underbrace{(\pi_x - i\pi_y)}_{\equiv \alpha^+}\underbrace{(\pi_x + i\pi_y)}_{\equiv \alpha} - i[\pi_x, \pi_y]$

$[\pi_x, \pi_y] = [p_x - \frac{q}{c}A_x, p_y - \frac{q}{c}A_y] = +\frac{q}{c}\left(\underbrace{[p_y, A_x]}_{= \frac{\hbar}{i}(\partial_y A_x)} + \underbrace{[A_y, p_x]}_{= -\frac{\hbar}{i}(\partial_x A_y)}\right) = i\frac{q\hbar}{c}B$ Eichinvariant!

$\Rightarrow [\alpha, \alpha^+] = [\pi_x + i\pi_y, \pi_x - i\pi_y] = i([\pi_y, \pi_x] - [\pi_x, \pi_y]) = 2i[\pi_y, \pi_x] = +\frac{2q\hbar}{c}B$

$\Rightarrow \quad \pi_x^2 + \pi_y^2 = \alpha^+\alpha + \frac{q\hbar}{c}B$

Def.: $a = \frac{\sqrt{c}\,\alpha}{\sqrt{2q\hbar B}}$, $a^+ = \frac{\sqrt{c}\,\alpha^+}{\sqrt{2q\hbar B}}$

$\Rightarrow \quad \pi_x^2 + \pi_y^2 = \frac{2q\hbar}{c}\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$

$\to \quad H = \frac{q\hbar B}{mc}(a^+a + \frac{1}{2})\sigma_0 + \frac{p_z^2}{2m}\sigma_0 - \frac{q\hbar}{2mc}B\sigma_z$

$= \hbar\underbrace{\frac{qB}{mc}}_{\equiv \omega_L}\left((a^+a + \frac{1}{2})\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_z\right) + \frac{p_z^2}{2m}\sigma_0$ ist in üblicher Spinbasis diagonal, da σ_z diagonal

In xy-Richtung harmonischer Oszillator

In z-Richtung freies Teilchen / ebene Welle $E_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$

Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ ($|\uparrow\rangle$):

$\hbar\omega_L a^+a|n\rangle_\uparrow = \hbar\omega_L n|n\rangle_\uparrow$

Teilchen mit Spin $-\frac{1}{2}$ ($|\downarrow\rangle$):

$\hbar\omega_L(a^+a + 1)|n\rangle_\downarrow = \hbar\omega_L(n+1)|n\rangle_\downarrow$

$\Rightarrow E_{n,m_s} = \hbar\omega_L(n - m_s + \frac{1}{2})$

$\to$ „gute" Quantenzahlen n, m_s, k_z

Entartung: siehe Landauniveaus (Eichabhängig)