Nichtrelativistische Näherungen der Dirac-Gl. höherer Ordnung

Näherung von χ bis zur 1. Ordnung in $\vec{\pi}/c$ liefert Pauli-Glg mit

$$H_P = \underbrace{\left(\frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \overset{=V}{q\phi} \right)\sigma_0}_{H_S \text{ - Schrödinger}} \underbrace{- \frac{\hbar q}{2mc} \vec{B}\cdot\vec{\sigma}}_{H_Z \text{ - Zeeman}} \quad , \quad \vec{\pi} = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \quad \text{Minimale Kopplung}$$

Näherung bis zur 2. Ordg. in $\vec{\pi}/c$ ~~liefert~~ („Foldy-Wouthuysen Trafo")
liefert 3 weitere Zusatzterme

$$H = H_P + H_{FW},$$

p^4-Term, H_{rel} Darwin-Term, H_{Darwin} Spin-Bahn-Kopplung, H_{LS}

$$\text{mit} \quad H_{FW} = -\frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{q\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla\vec{E} + \frac{\hbar q}{8m^2c^2}\vec{\sigma}\left(\vec{p}\times\vec{E} - \vec{E}\times\vec{p}\right)$$

$$\propto \frac{1}{8m^2c^2} \sim \frac{1}{c^2}$$

Darwin-Term:

$$H_{Darwin} = \frac{q\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta\phi$$

Reminder:
$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$
$\rightarrow$ für $\vec{A}=$ const. : $\vec{E} = -\nabla\phi$

Kann über endliche Ausdehnung des Elektrons
($e^- \hat{=}$ Kugel mit Radius $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$, Ladung $-e$)
motiviert werden

$\rightarrow$ Nichtlokalität

$\vec{p}^4$-Term:

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + (mc^2)^2} \underset{\text{TR um } \vec{p}^2c^2=0}{\simeq} mc^2 + \underbrace{\frac{\vec{p}^2c^2}{2mc^2}}_{\text{Schrödinger, freies Teilchen}} \underbrace{- \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{(\vec{p}^2c^2)^2}{(mc^2)^3}}_{= -\frac{1}{8}\frac{\vec{p}^4}{m^3c^2}}$$

$\rightarrow$ relativistische Korrektur $\quad H_{rel} = -\frac{1}{8m^3c^2}\vec{p}^4$

Spin-Bahn-Kopplung:

Im Fall eines rotationsinvarianten Skalarpotentials:

$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t\vec{A} \quad (\vec{A} = \text{const.} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi)$

Da $\phi = \phi(r)$ gilt: $\nabla\phi = \frac{\vec{r}}{r}\partial_r\phi = \vec{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial_r\phi}{r}}_{\text{nur radial abh.}}$

$$\Rightarrow H_{LS} = \frac{\hbar q}{8m^2c^2}\vec{\sigma}\left(\nabla\phi\times\vec{p} - \vec{p}\times\nabla\phi\right)$$

$$\vec{p}\times\nabla\phi = \underbrace{\vec{p}\times\vec{r}}_{=-\vec{r}\times\vec{p}=-\vec{L}}\cdot\frac{\partial_r\phi}{r} = \underbrace{-\vec{L}}_{\vec{L}=\vec{L}(\vartheta,\varphi)}\frac{\partial_r\phi}{r} = -\vec{L}\frac{\partial_r\phi}{r}$$

$$H_{LS} = \frac{q}{2m^2c^2}\vec{S}\cdot\vec{L}\,\frac{\partial_r\phi}{r} \underset{q\phi=V}{=} \frac{1}{2m^2c^2}\frac{\partial_r V}{r}\,\vec{S}\cdot\vec{L}$$

Ausrechnen: Basis $|n\, l\, j\, m_j\rangle$: $\vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right)$