

Ehrenfest - Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} \right\rangle$$

Herleitung: $\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \frac{d\langle \psi |}{dt} \hat{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{O} \frac{d| \psi \rangle}{dt} + \langle \psi | \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} | \psi \rangle$

• In Schrödingerbild gilt: $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$, $\hat{F} \neq \hat{F}(t)$

• Wenn $\hat{O} = \hat{O}(t)$, dann ^{ausdrücken} direkt / explizit zeitabh., da $\hat{r} \neq \hat{r}(t)$, $\hat{p} \neq \hat{p}(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$$

Außerdem gilt für die Wellenfkt.: $i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$
 $-i\hbar \partial_t \langle \psi| = \langle \psi| \hat{H}$ (da $H = H^\dagger$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi | \hat{H} \hat{O} | \psi \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi | \hat{O} \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} | \psi \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle \end{aligned}$$

• Im Heisenbergbild gilt: $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle \neq |\psi(t)\rangle$ (1)

$$\hat{O}_H = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O}_S \hat{U}(t, t_0) = (\hat{O}_S)_H$$

Die Heisenberg-Bewegungsglg. lautet $\frac{d\hat{O}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}_H, \hat{H}_H] + (\partial_t \hat{O}_S)_H$
 $= \hat{U}^\dagger(t, t_0) (\partial_t \hat{O}_S) \hat{U}(t, t_0)$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d}{dt} \hat{O}_H \right\rangle = \frac{d\langle \hat{O}_H \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{O}_H, \hat{H}_H] \rangle + \langle (\partial_t \hat{O}_S)_H \rangle$$

Erwartungswerte dürfen nicht vom gewählten Bild abhängen:

$$\Rightarrow \frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle + \langle \partial_t \hat{O} \rangle$$

Siehe auch:
 • Heisenberg bild
 • Zeitentwicklungoperator